Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра електропривода

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни “ СУЧАСНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ”

освітньо-професійноїпрограми другого (магістерського)
рівня вищої освіти зі спеціальності
141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Дніпро
НТУ ДП
2021

Конспект лекцій з дисципліни “Сучасні методи синтезу систем керування ” освітньо-професійної програми другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка») [Електронний ресурс] / Садовой О.В.– Дніпро: Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», 2021. – 88 с.

Укладач: доктор техн.наук, професор Садовой О.В.

Конспект лекцій призначені для студентів спеціальності 141і відповідає вимогам освітньо-професійної програми підготовки фахівців другого рівня вищої освіти ступеня (магістр) спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри електропривода С.С.Худолій,

канд. техн наук, професор

Погоджено рішенням науково-методичної комісії спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» (протокол НМК 21/22-01 від 30.08.2021).

ЗМІСТ

Тема 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1 Форми запису рівнянь АС

Змінні величини і коефіцієнти, що входять в рівняння, мають певну розмірність. Для зручності частіше використовують безрозмірну форму запису, для чого кожну змінну помножують та ділять на базове значення (звичайно номінальне усталене значення). Розглянемо диференціальне рівняння динаміки двигуна постійного струму

$$u = \frac{JR}{k\Phi}\frac{d\omega}{dt} + \frac{LJ}{k\Phi}\frac{d^2\omega}{dt^2} + k\Phi\omega$$

$$\frac{d}{dt} = p,\ \frac{L}{R} = T_я,\ \frac{JR}{(к\Phi)^2} = T_м$$

$$\frac{u}{k\Phi} = T_я T_м p^2\omega + T_м p\omega + \omega.$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння на $\omega_н$.

$$\frac{u}{k\Phi\omega_н} = T_я T_м p^2\frac{\omega}{\omega_н} + T_м p\frac{\omega}{\omega_н} + \frac{\omega}{\omega_н};$$

$$\bar{u} = T_я T_м p^2\bar{\omega} + T_м p\bar{\omega} + \bar{\omega}.$$

Приведення рівнянь до безрозмірної форми у відносних одиницях називають спрямованим нормуванням.

Зручна <u>операторна</u> форма запису, коли безрозмірні одиниці позначують $x_1, x_2, \ldots x_i$ або $y_1, y_2, \ldots y_i$; вводять символи операторів диференціювання

$$\frac{d}{dt} = p;\ \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \ldots$$

а коефіцієнти позначують a_i та b_i, тоді диференціальнене рівняння

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = b_0y$$

можливо записати у вигляді

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)x(t) = b_0y(t). \qquad (1.1)$$

Застосовують зовні схожу, але принципово іншу форму, яка має назву <u>операційна</u>.

Якщо до змінної x(t) застосувати перетворення Лапласа, то отримують зображення цієї функції x(p)

$$x(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt.$$

При цьому перша похідна від x буде мати зображення px(p), друга $p^2x(p)$, третя $p^3x(p)$ і т.д. Інтеграл від x буде мати зображення $\frac{x(p)}{p}$. Якщо застосувати перетворення Лапласа до диференціального рівняння (1.1), то при нульових початкових умовах воно набуде вигляду

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)x(p) = b_0y(p). \qquad (1.2)$$

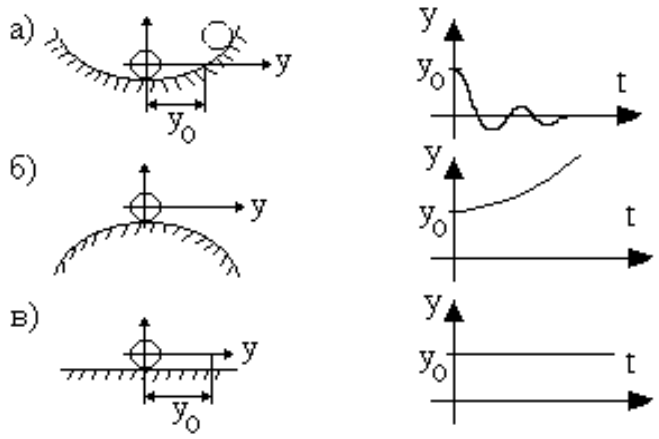
Розв’язавши операційне рівняння, ми знайдемо не оригінал x(t), а тільки його зображення x(p). Визначити оригінал по зображенню можна або за допомогою таблиці оригіналів і їх зображень, або застосувавши зворотне перетворення Лапласа

Рівняння одного і того ж елемента, записані в операторній і операційній формі, зовні зовсім однакові. Однак, вони принципово відрізняються один від одного. Рівняння (1.1) є диференціальним, в ньому буква p позначає оператор диференціювання $\frac{d}{dt}$, а змінні x(t) та y(t) є реальними функціями часу. Рівняння ж (1.2) - алгебраїчне, в ньому p є незалежною комплексною змінною, а величини x(p) і y(p) є тільки зображеннями фізичних величин x(t) та y(t). Формально від операторної до операційної формі можна перейти шляхом заміни позначень змінних як функцій часу t позначеннями цих змінних як функцій комплексної змінної p. Але це можна робити тільки в тому випадку, якщо початкові умови для диференціального рівняння нульові. В іншому випадку в операційному алгебраїчному рівнянні з'являться додаткові члени, що враховують початкові умови.

1.2 Поняття про стійкість розв’язань диференціальних рівнянь

Будь-яка система повинна бути перш за все працездатною. Це означає, що вона повинна нормально функціонувати при дії на неї різних зовнішніх збурень. Іншими словами, система повинна працювати стійко.

Поняття стійкості системи керування пов'язане із здатністю повертатися в стан рівноваги після зникнення зовнішніх дій, які вивели її з цього стану. Дане визначення є фізичним поняттям стійкості. Наочно стійкість ілюструється наступним рисунком.



Ілюстрація поняття стійкості

Тут положення кульки визначається координатою y. Виведемо кульку з положення рівноваги в точку y_0 і відпустимо її.

З аналізу зміни координати y(t) витікає:

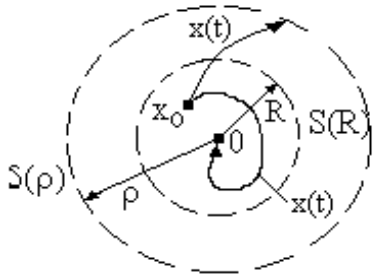
а) $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$, стійке положення кульки;

б) $y(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, нестійке положення кульки;

в) $y(t)=y_0=const$ при $t\geq 0$, нейтральне або байдуже положення кульки.

Таким чином, стійкість характеризується вільною поведінкою системи.

Стан системи можна зобразити точкою в просторі, координатами якого є змінні системи (x_1, x_2 ..., x_n). Початок координат цього простору відповідає рівноважному стану системи. Тоді розв'язання рівняння динаміки системи можна розглядати як деяку траєкторію X(t) в просторі змінних (x_1, x_2, ... , x_n).



Траєкторії руху, що
відповідають стійкій і нестійкій системам

Щоб вирішити питання про стійкість системи, необхідно визначити траєкторію її руху в просторі станів, тобто знайти розв'язання диференціального рівняння, яке описує досліджувану систему.

Лінійна система називається стійкою, якщо її вихідна координата залишається обмеженою при будь-яких обмежених по абсолютній величині вхідних діях. Стійка лінійна система повинна переходити від одного сталого стану до іншого при зміні задавальної дії. Стійкість лінійної системи визначається її характеристиками і не залежить від збурень, що діють на неї.

Диференційне рівняння руху досліджуваної лінійної системи завжди можливо представити у вигляді

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0) x_{вих} = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0) x_{вх}. \quad (2.1)$$

Розв'язання цього рівняння складається з суми двох розв'язань: частинного розв'язання неоднорідного рівняння з правою частиною і загального розв'язання однорідного рівняння без правої частини, тобто, рух системи складається з двох рухів – вимушеного, обумовленого правою частиною рівняння і вільного, обумовленого лівою частиною рівняння.

$$x_{вих}(t) = x_{вих\ віл}(t) + x_{вих\ вим}(t).$$

Система стійка, якщо при $t \to \infty$ вільний рух прагне до 0. Тобто необхідно дослідити однорідне рівняння

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0) x_{вих} = 0.$$

Розв'язання цього рівняння має вигляд

$$x_{вих\ віл} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t} \ ,$$

де p_i– корені характеристичного рівняння

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0.$$

c_i - постійні інтегрування, що визначаються з початкових умов, які залежать від правої частини неоднорідного рівняння.

Корені характеристичного рівняння залежать тільки від лівої частини рівняння. c_i залежать як від лівої, так і від правої частини рівняння. Однак в поняття стійкості входить тільки факт наявності або відсутності загасання перехідного процесу і стійкість системи таким чином визначається тільки лівою частиною характеристичного рівняння.

Для визначення стійкості необхідно розв'язати характеристичне рівняння і визначити корені.

Корені характеристичного рівняння $p = \pm\alpha \pm j\beta$ можуть бути дійсним $\pm\alpha$, комплексними $\pm\alpha \pm j\beta$ і чисто уявними $\pm j\beta$. Розглянемо поведінку системи з різними коренями характеристичного рівняння.

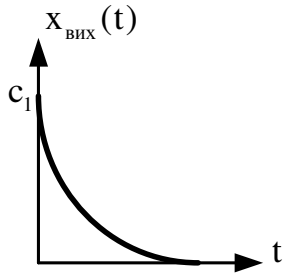
1. Корінь дійсний негативний.

$p_1 = -\alpha_1$.

Розв'язання рівняння

$x_{вих}(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t}$.

Перехідний процес має вигляд



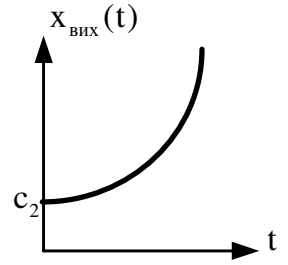
2.Корінь дійсний позитивний.

$p_2 = \alpha_2$.

Розв'язання рівняння

$x_{вих}(t) = c_2 e^{\alpha_2 t}$.

Перехідний процес має вигляд



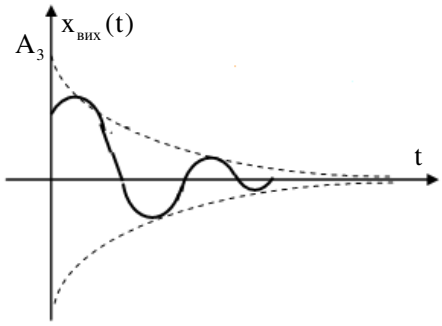
3.Корені комплексні з негативною дійсною частиною.

$p_{3,4} = -\alpha_3 \pm j\beta_3$.

Розв'язання рівняння

$x_{вих}(t) = c_3 e^{(-\alpha_3 - j\beta_3)t} + c_4 e^{(-\alpha_3 + j\beta_3)t} = A_3 e^{-\alpha_3 t} \sin(\beta_3 t + \varphi)$.

Перехідний процес має вигляд



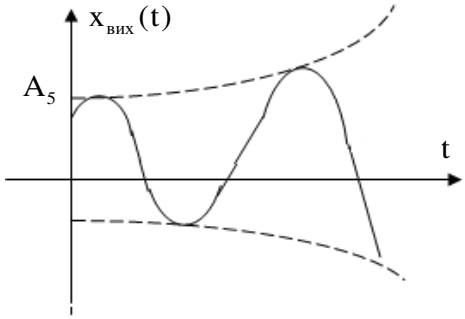
4.Корені комплексні з позитивною дійсною частиною.

$p_{5,6} = \alpha_5 \pm j\beta_5$.

Розв'язання рівняння

$x_{вих}(t) = c_5 e^{(\alpha_5 - j\beta_5)t} + c_6 e^{(\alpha_5 + j\beta_5)t} = A_5 e^{\alpha_5 t} \sin(\beta_5 t + \varphi)$.

Перехідний процес має вигляд



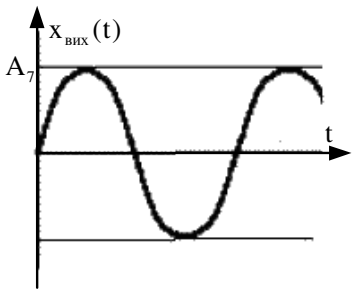
5.Корені уявні.

$p_{7,8} = \pm j\beta_7$.

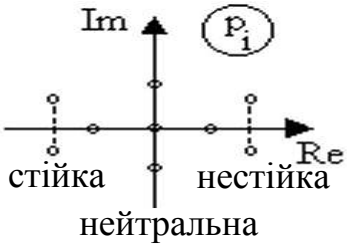
Розв'язання рівняння

$x_{вих}(t) = c_7 e^{-j\beta_7 t} + c_8 e^{j\beta_7 t} = A_7 \sin(\beta_7 t + \varphi)$.

Перехідний процес має вигляд



Таким чином, для загасання вільного руху необхідно і достатньо, щоб дійсна частина усіх коренів була негативною, або ці корені на площині комплексного змінного були розташовані зліва від уявної вісі.



Якщо корені характеристичного рівняння розташовані на уявній вісі, то система знаходиться на межі стійкості. При цьому можливі два випадки: корінь

на початку координат і пара уявних коренів. Нульовий корінь з'являється, коли вільний член характеристичного рівняння рівний нулю. В цьому випадку межу стійкості називають аперіодичною. Якщо решту коренів цього рівняння мають негативні дійсні частини, то система стійка не щодо вихідного сигналу, а щодо його похідної, вихідний сигнал в сталому режимі має довільне значення. Такі системи називають нейтрально стійкими. У тому випадку, коли характеристичне рівняння має пару уявних коренів, межу стійкості називають коливальною.

Якщо хоч би один з коренів лежить в правій напівплощині комплексної площини коренів характеристичного рівняння, то система нестійка.

Обчислення коренів характеристичного рівняння високого порядку викликає певні труднощі. Тому для дослідження стійкості систем розроблені критерії (правила), що дозволяють судити про розташування коріння на комплексній площині без їх розрахунку. Перш ніж скористатися для оцінки стійкості тим або іншим критерієм, слід перевірити виконання необхідної умови стійкості.

Необхідною, але недостатньою умовою стійкості системи є позитивність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння системи

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0$$

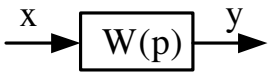
тобто дотримання умови $a_i>0$ для всіх і від 0 до n, де n - порядок системи.

1.3 Графічна інтерпретація математичного опису САК. Структурні схеми

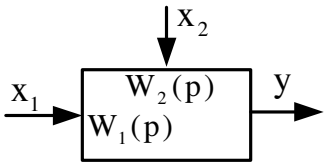
Систему автоматичного керування можна розглядати як комбінацію типових динамічних ланок. Зображення системи керування у вигляді сукупності типових і нетипових динамічних ланок з вказівкою зв'язків між ними носить назву структурної схеми системи. Ланка в цьому випадку виступає як елементарна структурна одиниця, перетворювач інформації.

Структурні схеми складаються з окремих структурних елементів. Основними елементами структурних схем є наступні.

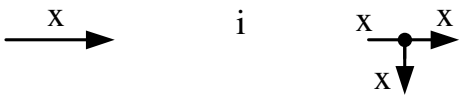
1. Ланка з одним входом і одним виходом: Y(p)=W(p)X(p).



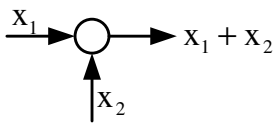
2. Ланка з двома входами і одним виходом (біля кожного входу записується своя передавальна функція): $Y(p)=W_1(p)X_1(p)+W_2(p)X_2(p)$.



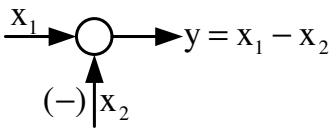
3. Лінія зв'язку і вузол (розгалуження), стрілка показує напрям передачі інформації.



4. Суматор.

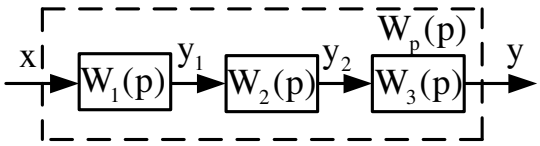


5. Елемент порівняння.



В системах керування зустрічаються три види з'єднань ланок: послідовне, паралельне і з'єднання по схемі зі зворотнім зв’язком.

Послідовне з'єднання ланок наведено на наступному рисунку, таке з'єднання характеризується тим, що вихід попередньої ланки подається на вхід наступної.



Послідовне з'єднання ланок

Вихідна величина послідовно з’єднаних ланок дорівнює

$Y(p)=W_1(p)Y_2(p)= ... =W_1(p)W_2(p)W_3(p)X(p)$.

Звідки результуюча передавальна функція $W_p(p)$ дорівнює

$W_p(p)=W_1(p)W_2(p)W_3(p)$.

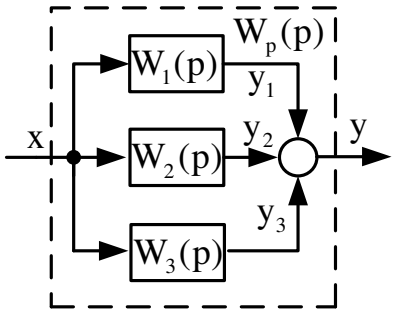
Отже, в загальному випадку можна записати

$$W_p(p)=\prod_{i=1}^{n} W_i(p), \qquad (1.1)$$

де n - число включених послідовно ланок.

Таким чином, результуюча передавальна функція послідовно сполучених ланок рівна добутку передавальних функцій ланок.

Паралельне з'єднанняланок зображене на наступному рисунку. Таке з'єднання характеризується тим, що на входи всіх ланок подається одна і та ж вхідна дія, а вихідна величина визначається сумою вихідних величин окремих ланок.



Паралельне з'єднання ланок

Вихідна величина паралельно з’єднаних ланок визначається

$y=y_1+y_2+y_3$,

тобто

$Y(p)=W_1(p)X(p)+W_2(p)X(p)+W_3(p)X(p)$.

Тоді $W_p(p)=W_1(p)+W_2(p)+W_3(p)$.

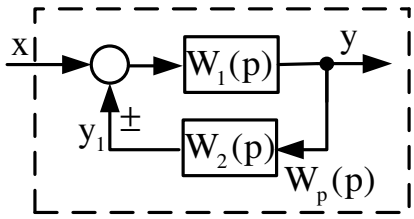
У загальному випадку

$$W_p(p)=\sum_{i=1}^{n} W_i(p), \qquad (1.2)$$

де n - число включених паралельно ланок.

Таким чином, результуюча передавальна функція паралельно з’єднаних ланок дорівнює сумі передавальних функцій складових ланок.

Зворотний зв'язок. Таке з'єднання ланок зображене на наступному рисунку. Воно характеризується тим, що вихідний сигнал ланки подається на його вхід.



З'єднання ланок за схемою із зворотним зв'язком

Зворотний зв'язок може бути додатнім (ДЗЗ), якщо сигнал y_1, який знімається з виходу другої ланки, підсумовується з сигналом x на вході, і відємним (ВЗЗ), якщо y_1 віднімається. Крім того, зворотні зв'язки можуть бути жорсткими і гнучкими. Зв'язок називається гнучким, якщо передавальна функція $W_2(p)$ в сталому режимі дорівнює нулю.

Для визначення результуючої передавальної функції такої комбінації ланок запишемо співвідношення:

$$\begin{cases} Y(p)=W_1(p)\cdot\left[X(p)\pm Y_1(p)\right] \\ Y_1(p)=W_2(p)Y(p) \end{cases},$$

де знак “+” відноситься до ДЗЗ, а знак “-” - до ВЗЗ зворотного зв'язку.

Звідки результуюча передавальна функція зворотного зв'язку має вигляд

$$W_p(p)=\frac{W_1(p)}{1\pm W_1(p)W_2(p)}, \qquad (1.3)$$

де знак “+” відповідає ВЗЗ, знак “–” - ДЗЗ.

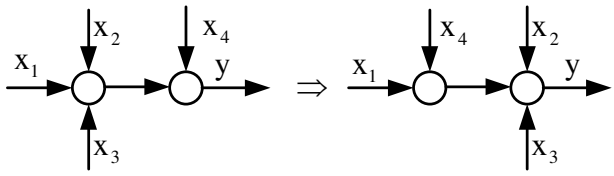
У загальному випадку, обєднання динамічних ланок, створюючих систему керування, включає комбінації всіх трьох розглянутих випадків, тобто є змішаним з'єднанням ланок. Користуючись виразами (1.1), (1.2) і (1.3), можна знайти загальну результуючу передавальну функцію змішаного з'єднання ланок.

У тих випадках, коли структурна схема системи виявляється складною і містить перехресні зв'язки, її спрощують і зводять до простого еквівалентного вигляду, користуючись правилами перетворення структурних схем .

1.4 Методи структурних перетворень

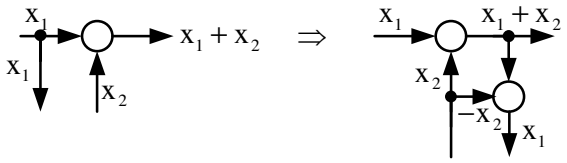
Основні правила еквівалентного перетворення структурних схем.

1. Перенесення суматора:

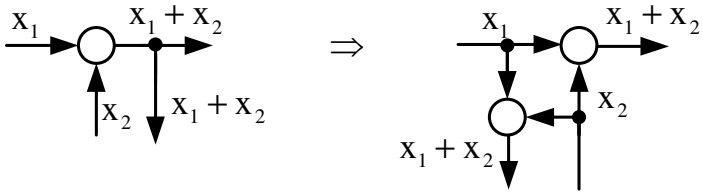


$y = x_1+x_2+x_3+x_4$ $\qquad$ $y = x_1+x_4+x_2+x_3$

2. Перестановка вузла розгалуження через вузол сумування

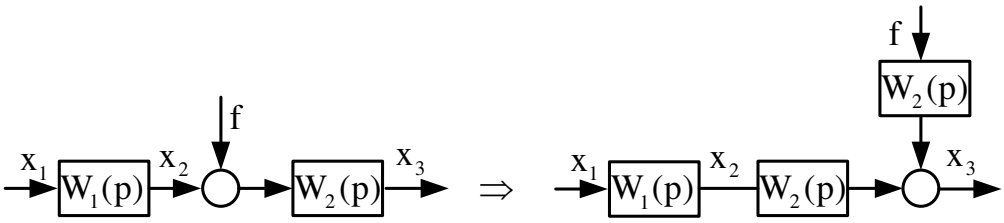


3. Перестановка вузла сумування через точку розгалуження

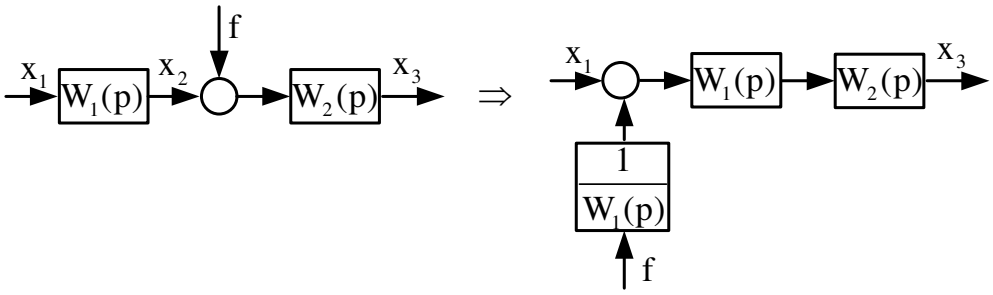


4. Перенесення точки прикладання впливу

а) за ходом сигналу:

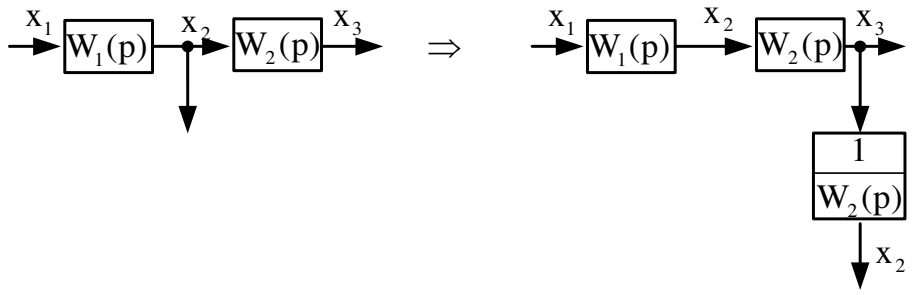


б) проти ходу сигналу:

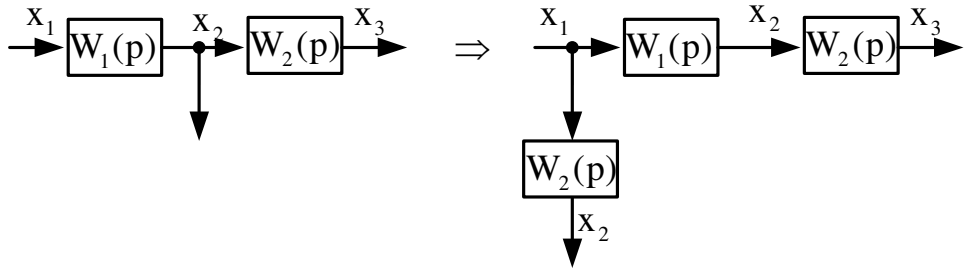


5. Перенесення вузла розгалуження через ланку

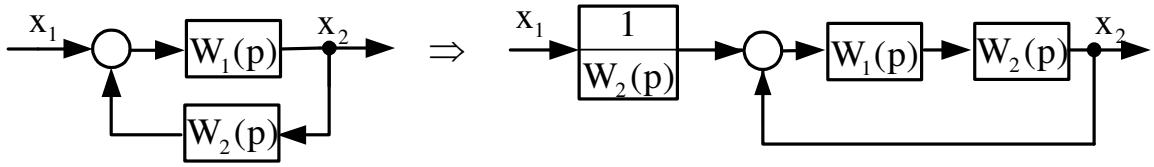
а) за ходом сигналу:



б) проти хода сигналу:



5. Перехід до одиничного зворотного зв'язку.

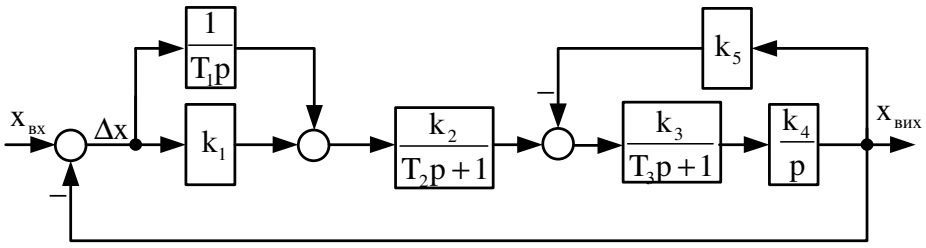


$$W_p(p)=\frac{W_1(p)}{1\pm W_1(p)W_2(p)} \qquad W_p(p)=\frac{W_1(p)\,W_2(p)}{1\pm W_1(p)\,W_2(p)}\cdot\frac{1}{W_2(p)}$$

1.5 Передавальні функції розімкненої та замкненої систем

Кінцевою метою структурного аналізу є отримання необхідних передавальних функцій системи для дослідження її динаміки.

Розглянемо структурну схему системи автоматичного керування.



1. $W_1(p)=k_1+\dfrac{1}{T_1p}=\dfrac{k_1T_1p+1}{T_1p}$

2. $W_2(p)=\dfrac{k_3}{T_3p+1}\cdot\dfrac{k_4}{p}=\dfrac{k_3k_4}{T_3p^2+p}$

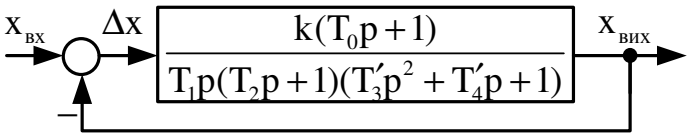
3. $W_3(p)=\dfrac{W_2}{1+k_5W_2}=\dfrac{\dfrac{k_3k_4}{T_3p^2+p}}{1+\dfrac{k_3k_4}{T_3p^2+p}\cdot k_5}=\dfrac{k_3k_4}{T_3p^2+p+k_3k_4k_5}=$

$$= \frac{\frac{1}{k_5}}{\frac{T_3}{k_3k_4k_5}p^2 + \frac{1}{k_3k_4k_5}p + 1}$$

4. $$W(p) = W_1(p) \cdot \frac{k_2}{T_2p+1} \cdot W_3(p) = \frac{(k_1T_1p+1)\frac{k_2}{k_5}}{T_1p(T_2p+1)(\frac{T_3}{k_3k_4k_5}p^2 + \frac{1}{k_3k_4k_5}p+1)} =$$

$$= \frac{k(T_0p+1)}{T_1p(T_2p+1)(T_3'p^2 + T_4'p+1)}$$

$$k = \frac{k_2}{k_3} \qquad T_0 = k_1T_1 \qquad T_3' = \frac{T_3}{k_3k_4k_5} \qquad T_4' = \frac{1}{k_3k_4k_5}$$

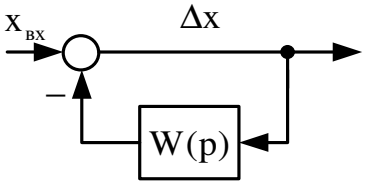


Передавальна функція замкненої системи (головний оператор)

$$W(p) = \frac{A}{B}$$

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} = \frac{k(T_0p+1)}{T_1p(T_2p+1)(T_3'p^2+T_4'p+1)+k(T_0p+1)} = \frac{A}{A+B}$$

Для оцінки точності автоматичної системи в усталених режимах необхідно знати передавальну функцію замкненої системи за каналом помилки, що встановлює зв'язок між помилкою системи і задавальним впливом.



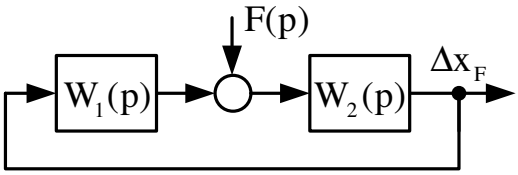
$$\Phi_{\Delta x(p)} = \frac{\Delta x}{x_{вх}} = \frac{x_{вх} - x_{вих}}{x_{вх}} = 1 - \Phi(p) = \frac{T_1p(T_2p+1)(T_3'p^2+T_4'p+1)}{T_1p(T_2p+1)(T_3'p^2+T_4'p+1)+k(T_0p+1)} =$$

$$= \frac{B}{A+B}$$

Таким чином, маючи передавальну функцію розімкненої системи можливо отримати інші передавальні функції.

В автоматичних системах, як правило, діють зовнішні впливи F(p). Реакцією системи на ці збурення є відхилення вихідної величини від усталеного значення збурення – помилка впливу збурення $\Delta x_{F(p)}$.

Зв'язок між помилкою впливу збурення і самим збуренням характеризується передавальною функцією за каналом збурення.



$$\Phi_F(p) = \frac{\Delta x_F}{x(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_2(p)}{1 + W(p)}.$$

Знаменник передавальної функції за каналом збурення такий самий, як і в усіх інших передавальних функціях замкненої системи, а чисельник уявляє собою передавальну функцію частини системи між точкою прикладання збурення і вихідною величиною.

При дії на систему декількох збурень, прикладених в різних точках, помилку впливу збурення можливо визначити, просумувавши помилки за каналом збурення, тобто застосувавши принцип суперпозиції, відповідно до якого кожне збурення діє на систему самостійно, інші збурення при цьому прирівнюють до нуля.

Одна й таж сама система може бути по відношенню до одних збурень статичною, а до інших – астатичною.

Контрольні запитання

1.Чим відрізняюся операторна і операційна форми запису?
2.Дайте поняття стійкості АС. Проілюструйте його.
3.Траєкторії руху стійких і нестійких АС в просторі станів.
4.Необхідна і достатня умова стійкості АС.
5.Зв'язок стійкості АС з коренями характеристичного рівняння.
6.Що таке структурна схема АС?
7.Передавальна функція замкненої системи за каналом помилки.
8.Передавальна функція замкненої системи за керуючим впливом.
9.Передавальна функція замкненої системи за каналом збурення.

Тема 2. МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Переміщення всіх коренів (полюсів) замкненої системи в будь яке наперед задане положення становить предмет теорії модального керування. Походження терміна "модальне керування" пояснюється тим, що кожному кореню відповідає певна складова вільного руху системи, звана модою. При використанні методів модального керування насамперед виникає питання про розташування коренів системи, до якого слід прагнути. Це питання в кожному конкретному випадку може вирішуватися по різному, в залежності від властивостей об'єкта керування та інших обставин. Розглянемо тільки один метод, що дає рекомендації з розташування коренів системи і повністю справедливий у випадку, якщо передавальна функція замкненої системи не має нулів. Необхідно відзначити, що і в разі наявності нулів виконання рекомендацій методу стандартних коефіцієнтів, який викладається нижче, дає рішення, близькі до оптимальних в розглянутому сенсі.

Метод стандартних коефіцієнтів.

Розглянемозамкнену систему, яка описуєтьсядиференціальнимрівнянням

$$a_0 \frac{dx^{(n)}}{dt^n} + a_1 \frac{dx^{(n-1)}}{dt^{n-1}} + ... + a_n x = g(t). \qquad (2.1)$$

Приймемо, що $g(t) = 1(t)$, а початкові умови нульові. Щоб забезпечити в деякому сенсі "оптимальне" протікання реакції X(t), запропоновані різні розподіли коренів характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (2.2)$$

<u>а) біноміальні стандартні форми.</u>

Ця пропозиція полягає в забезпеченні однаковості всіх коренів рівняння (2.2), причому n-кратний корінь повинен бути дійсним і негативним зі значенням модуля ω_0, визначеним вимогами до швидкодії системи (чим більше ω_0, тим менше час регулювання).Тоді ліва частина характеристичного рівняння перетворюється в біном Ньютона $(p + \omega_0)^n$, розгортаючи який, отримуємо стандартні (бажані) значення коефіцієнтів характеристичного рівняння. Наприклад, для систем до 8-го порядку включно характеристичний поліном має вигляд:

$$p + \omega_0$$

$$p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2$$

$$p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3$$

$$p^4 + 4\omega_0 p^3 + 6\omega_0^2 p^2 + 6\omega_0^3 p + \omega_0^4$$

$$p^5 + 5\omega_0 p^4 + 10\omega_0^2 p^3 + 10\omega_0^3 p^2 + 5\omega_0^4 p + \omega_0^5$$

$$p^6 + 6\omega_0 p^5 + 15\omega_0^2 p^4 + 20\omega_0^3 p^3 + 15\omega_0^4 p^2 + 6\omega_0^5 p + \omega_0^6$$

$$p^7 + 7\omega_0 p^6 + 21\omega_0^2 p^5 + 35\omega_0^3 p^4 + 35\omega_0^4 p^3 + 21\omega_0^5 p^2 + 7\omega_0^6 p + \omega_0^7$$

$$p^8 + 8\omega_0 p^7 + 28\omega_0^2 p^6 + 56\omega_0^3 p^5 + 70\omega_0^4 p^4 + 56\omega_0^5 p^3 + 28\omega_0^6 p^2 + 8\omega_0^7 p + \omega_0^8.$$

Реакції системи при біноміальному розподілі коренів є монотонними і досить повільно протікають, що в багатьох випадках не є оптимальним. На рисунку 2.1 наводяться реакції на одиничний ступінчастий вплив систем з біноміальним розподілом коренів від першого до восьмого порядку.

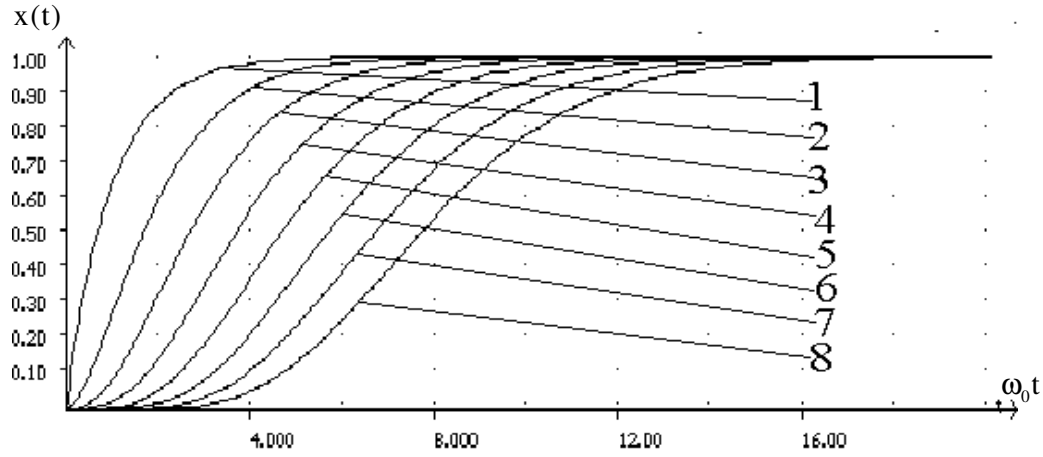


Рисунок 2.1 - Реакції систем з біноміальним розподілом коренів на одиничний ступінчастий вплив.

<u>б) стандартні форми Баттерворта.</u>

Розподіл за Баттервортом полягає в тому, що корені при дотриманні однакових кутових відстаней розподіляються по півколу радіуса ω_0 в лівій півплощині. Однаковість кутових відстаней слід розуміти в наступному сенсі: кут, складений з уявною віссю радіусом-вектором найближчого до неї кореня, дорівнює половині кута між радіусами-векторами сусідніх коренів. Стандартні форми Баттерворта мають такий вигляд:

$$p + \omega_0$$

$$p^2 + 1,4\omega_0 p + \omega_0^2$$

$$p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$$

$$p^4 + 2,6\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,6\omega_0^3 p + \omega_0^4$$

$$p^5 + 3,24\omega_0 p^4 + 5,24\omega_0^2 p^3 + 5,24\omega_0^3 p^2 + 3,24\omega_0^4 p + \omega_0^5$$

$$p^6 + 3,86\omega_0 p^5 + 9,46\omega_0^2 p^4 + 9,13\omega_0^3 p^3 + 7,46\omega_0^4 p^2 + 5,86\omega_0^5 p + \omega_0^6$$

$$p^7 + 4,5\omega_0 p^6 + 10,1\omega_0^2 p^5 + 14,6\omega_0^3 p^4 + 14,6\omega_0^4 p^3 + 10,1\omega_0^5 p^2 + 4,5\omega_0^6 p + \omega_0^7$$

$$p^8 + 5,12\omega_0 p^7 + 13,14\omega_0^2 p^6 + 21,84\omega_0^3 p^5 + 25,69\omega_0^4 p^4 + 21,84\omega_0^5 p^3 +$$
$$+13,14\omega_0^6 p^2 + 5,12\omega_0^7 p + \omega_0^8.$$

Реакції систем з розподілом коренів за Баттервортом в порівнянні з біноміальним розподілом більш коливальні, але забезпечують більшу швидкодію і в багатьох випадках відповідають інтуїтивній уяві про оптимальний перехідний процес. Реакції систем з розподілом коренів за Баттервортом з першого до восьмого порядку включно на одиничний ступінчастий вплив наведені на рисунку 2.2.

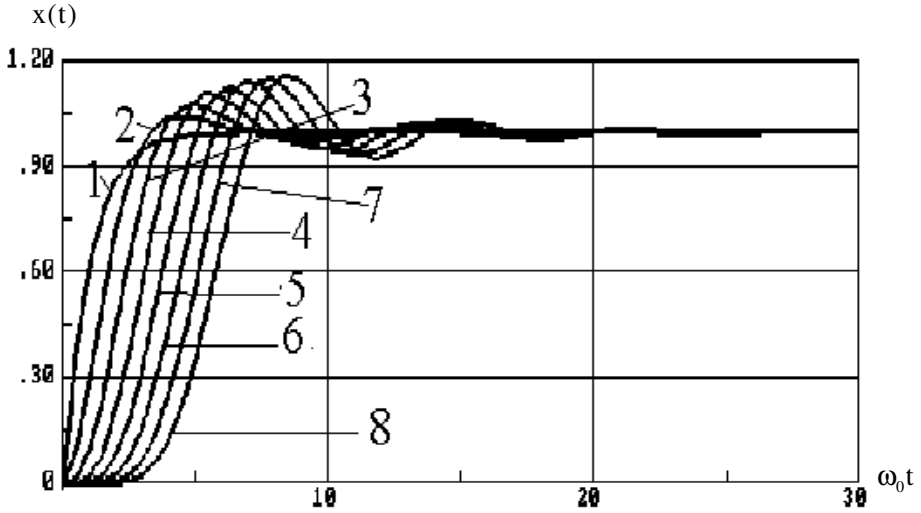


Рисунок 2.2 - Реакції систем з розподілом коренів за Баттервортом на одиничний ступінчастий вплив.

<u>в) Стандартні форми, що забезпечують мінімум лінійної квадратичної інтегральної оцінки.</u>

Стандартні форми в даному випадку забезпечують мінімум оцінки

$$I_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt$$

і мають вигляд

$$p + \omega_0$$

$$p^2 + \omega_0 p + \omega_0^2$$

$$p^3 + \omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$$

$$p^4 + \omega_0 p^3 + 3\omega_0^2 p^2 + 2\omega_0^3 p + \omega_0^4$$

$$p^5 + \omega_0 p^4 + 4\omega_0^2 p^3 + 3\omega_0^3 p^2 + 3\omega_0^4 p + \omega_0^5$$

$$p^6 + \omega_0 p^5 + 5\omega_0^2 p^4 + 4\omega_0^3 p^3 + 6\omega_0^4 p^2 + 5\omega_0^5 p + \omega_0^6$$

$$p^7 + \omega_0 p^6 + 6\omega_0^2 p^5 + 5\omega_0^3 p^4 + 10\omega_0^4 p^3 + 6\omega_0^5 p^2 + 4\omega_0^6 p + \omega_0^7$$

$$p^8 + \omega_0 p^7 + 7\omega_0^2 p^6 + 6\omega_0^3 p^5 + 15\omega_0^4 p^4 + 10\omega_0^5 p^3 + 10\omega_0^6 p^2 + 4\omega_0^7 p + \omega_0^8$$

Реакції системи на одиничний ступінчастий вплив в даному випадку мають більшу коливальність порівняно з розподілом за Баттервортом і наведені на рисунку 2.3.

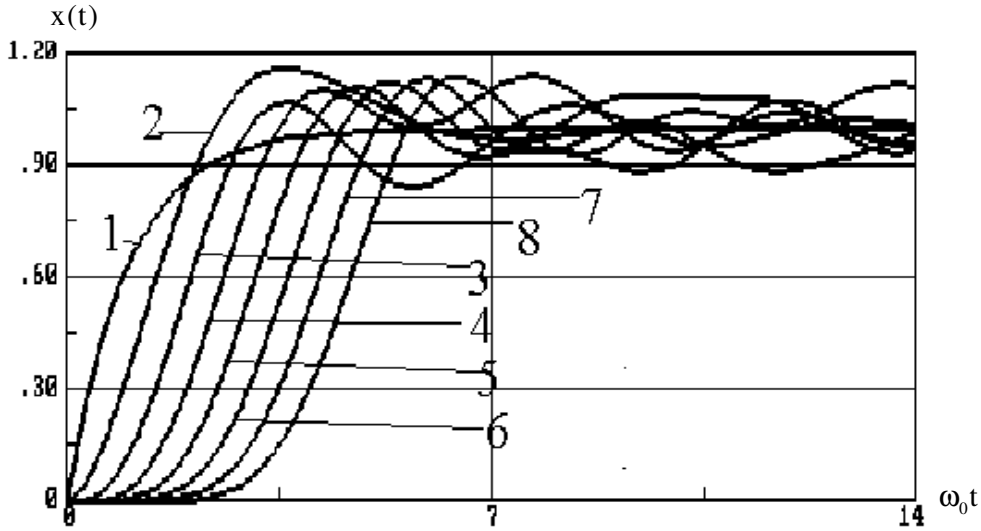


Рисунок 2.3 - Реакції систем, оптимізованих за критерієм

$I_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt$, на одиничний ступінчастий вплив

г) Стандартні форми, що забезпечують мінімум інтегральної оцінки $I_3 = \int_0^\infty t|\varepsilon(t)|dt.$

В даному випадку реакції системи на ступінчастий вплив в порівнянні з реакціями системи з біноміальним розподілом характеризуються значно більшою швидкодією, а в порівнянні з реакціями системи з розподілом за Баттервортом - істотно меншою коливальністю. Стандартні форми в цьому випадку мають вигляд:

$p + \omega_0$

$p^2 + 1,4\omega_0 p + \omega_0^2$

$p^3 + 1,75\omega_0 p^2 + 2,15\omega_0^2 p + \omega_0^3$

$p^4 + 2,1\omega_0 p^3 + 3,4\omega_0^2 p^2 + 2,7\omega_0^3 p + \omega_0^4$

$p^5 + 2,8\omega_0 p^4 + 5\omega_0^2 p^3 + 5,5\omega_0^3 p^2 + 3,4\omega_0^4 p + \omega_0^5$

$p^6 + 3,25\omega_0 p^5 + 6,6\omega_0^2 p^4 + 8,6\omega_0^3 p^3 + 7,45\omega_0^4 p^2 + 3,95\omega_0^5 p + \omega_0^6$

$p^7 + 4,47\omega_0 p^6 + 10,42\omega_0^2 p^5 + 15,08\omega_0^3 p^4 + 15,54\omega_0^4 p^3 + 10,64\omega_0^5 p^2 +$

$+4,58\omega_0^6 p + \omega_0^7$

$p^8 + 5,2\omega_0 p^7 + 12,8\omega_0^2 p^6 + 21,6\omega_0^3 p^5 + 25,75\omega_0^4 p^4 + 22,2\omega_0^5 p^3 +$

$+13,3\omega_0^6 p^2 + 2,15\omega_0^7 p + \omega_0^8.$

Дані стандартні форми знаходять досить широке застосування на практиці, але будь-якого алгоритму їх визначення не існує, оскільки вони отримані експериментально. Реакції розглянутих систем на одиничний ступінчастий вплив наведені на рисунку 2.4.

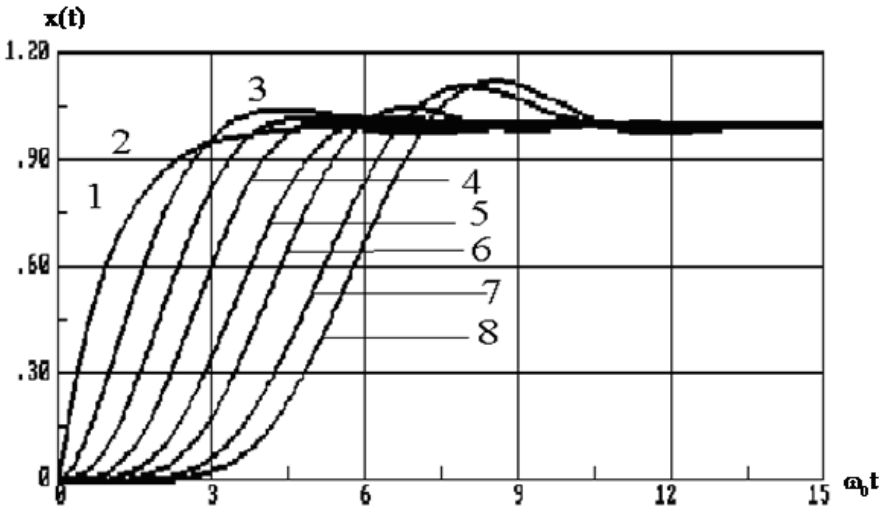


Рисунок 2.4 - Реакції систем,оптимізованих за критерієм $I_3 = \int_0^\infty t\left|\varepsilon(t)\right|dt$,

на одиничний ступінчастий вплив

Існують рекомендації з розташування коренів на дійсній осі, що забезпечує задовільний характер перехідної функції при наявності нулів у передавальній функції. При передавальній функції з одним нулем корені рекомендується розташовувати на негативній дійсній півосі за арифметичною прогресією, а при передавальній функції з двома нулями - за геометричною.

Розглянемо лінійний стаціонарний об'єкт

$$\left.\begin{aligned} X'(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (2.3)$$

В сучасній теорії керування термін "об'єкт" слід розуміти більш широко, ніж зазвичай. До об'єкту будемо відносити також виконавчі органи і попередні їм підсилювачі (вхідні сигнали підсилювачів утворюють вектор U(t).

До об'єкта слід відносити і чутливі елементи, приймаючи їх вихідні сигнали в якості складових вихідного вектора $\vec{Y}(t)$.

Будемо вважати, що всі змінні стану об'єкта підлягають безпосередньому вимірюванню і використовуються в якості вихідних сигналів. Тоді матриця C обертається в одиничну матрицю I, так що $\vec{Y} = \vec{X}$.

Передавальна функція об'єкта

$$W(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = (pI - A)^{-1}B. \qquad (2.4)$$

Регулятор, що приєднується до об'єкта, отримує в даному випадку змінні стану і виробляє керування, що прикладаються до об’єкту. Будемо вважати, що регулятор лінійно перетворить сигнали, що надійшли, і видає в якості виходу їх лінійні комбінації. Вихідні сигнали регулятора можуть бути подані на об'єкт в тих же точках, що і вимірні зовнішні впливи. Позначимо ці впливи через $\vec{V}(t)$, а $m \times n$ матрицю перетворення регулятора - через R. Тоді отримаємо

$$\vec{U} = \vec{V} - R\vec{X}. \qquad (2.5)$$

Знак "-" вказує на від’ємний зворотний зв'язок. Об'єднуючи рівняння (22) і (24), отримаємо

$$X'(t) = (A - BR)X(t) + BV(t)\,. \qquad (2.6)$$

Перейшовши до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах з (2.6) отримаємо матричну передавальну функцію замкненої системи

$$W(p) = \frac{X(p)}{V(p)} = (pI - A + BR)^{-1}B. \qquad (2.7)$$

В практичних завданнях W матрицю R обирають так, щоб надати матриці замкнутої системи A-BR необхідні властивості, наприклад, задане розташування власних значень. Це можливо тільки при повній керованості системи.

Розглянемо випадок, коли об'єкт має тільки один вхідний сигнал. У рівнянні (2.3) замість вектора U(t) буде тепер скалярна величина u(t), а замість матриці B типу $n \otimes m$ буде матриця стовпець b. Прямокутна матриця R перетворюється в матрицю-рядок r. Така ж заміна відбудеться і в матричної передавальної функції замкнутої системи. Уявімо передавальну функцію об'єкта в наступному вигляді

$$W(p) = \frac{g(p)}{F(p)}, \qquad (2.8)$$

де F(p)=det(pI-A), g - матриця стовпець, отримана перемноженням приєднаної матриці і матриці b.

Структурна схема замкненої системи прийме вигляд, показаний на рисунку 2.5.

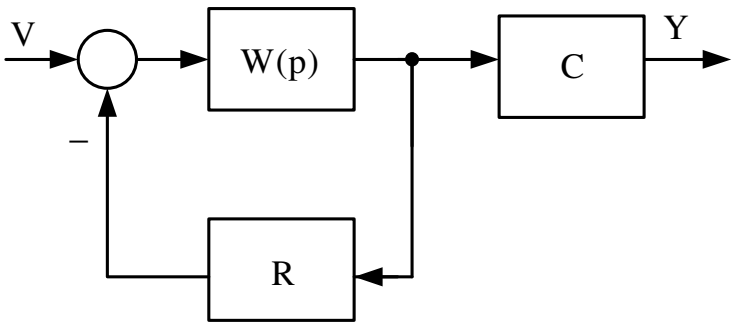


Рисунок 2.5 - Структурна схема системи

Характеристичне рівняння системи

$$1 + R\frac{g(p)}{F(p)} = 0, \qquad (2.9)$$

де порядок проходження матричних співмножників узятий таким, щоб добуток був скалярною величиною. Привівши ліву частину (2.9) до спільного знаменника і враховуючи, що чисельник дорівнює характеристичному поліному H(p) замкненої системи, отримаємо

$$rg(p) = H(p) - F(p). \qquad (2.10)$$

У цьому виразі невідомою є тільки матриця-рядок r. Поліном H(p) визначено бажаним розташуванням коренів замкненої системи і може бути обраний у вигляді однієї з стандартних форм. Прирівнюючи коефіцієнти лівої і правої частин виразу (2.10) при однакових ступенях оператора p, отримаємо

систему алгебраїчних рівнянь, з якої можна знайти всі елементи матриці регулятора r, що забезпечують задане розташування коренів характеристичного рівняння замкненої системи.

Приклад.

Розглянемо об'єкт, який описується рівняннями

$$\left.\begin{aligned} &\psi'' + C_1\psi = -C_2\delta \\ &T\delta' + \delta = ku \end{aligned}\right\}. \qquad (2.11)$$

Позначимо $\delta = x_1$; $\psi' = x_2$; $\psi = x_3$. Після перетворень отримаємо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &Tx_1' + x_1 = ku \\ &x_2' + C_1x_3 = -C_2x_1 \\ &x_3' = x_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.12)$$

В матричній формі можна записати

$X' = AX + bu,$

де

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{k}{T} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чисельні значення коефіцієнтів рівнянь прийняті довільно. Матриця керованості має вигляд

$$Q_k = \left(b,\ Ab,\ A^2b\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює порядку об'єкта (n=3), об'єкт повністю керований і існує можливість побудови регулятора, який забезпечує будь-яке бажане розташування коренів замкненої системи. Поліном F(p) і матриця-стовпець g(p) визначаються з матричної передавальної функції (МПФ) об'єкта

$$W(p) = (pI - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p^2+2)}\begin{pmatrix} p^2+2 \\ -p \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{g(p)}{F(p)}.$$

Приймемо за бажаний характеристичний поліном біноміальну стандартну форму

$$H(p) = p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3.$$

Підставивши g(p), F (p), H (p) в рівняння (2.10), після перемноження отримаємо

$$r_1(p^2+2) - r_2 p - r_3 = p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3 - (p+1)(p^2+2).$$

Прирівнявши члени при однакових степенях p в лівій та правій частинах, отримаємо

$$\left.\begin{aligned} 2r_1 - r_3 &= \omega_0^3 - 2 \\ -r_2 &= 3\omega_0^2 - 2 \\ r_1 &= 3\omega_0 - 1 \end{aligned}\right\}.$$

Обираємо ω_0=1 і отримаємо r_1=2; r_2=-1; r_3=5.

Враховуючи вираз (2.5) для системи стабілізації величини ψ, отримаємо закон керування

$$u = -(2\delta - \psi' + 5\psi).$$

Розглянемо інший приклад. Синтезуємо модальний регулятор для об'єкта керування, структурна схема якого наведена на наступному рисунку

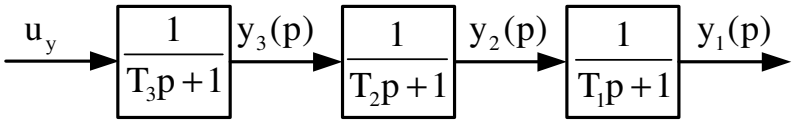


Рисунок 2.6 – Структурна схема об'єкта керування

Система диференціальних рівнянь динаміки такого об'єкта має вигляд

$$py_1 = -\frac{1}{T_1}y_1 + \frac{1}{T_1}y_2$$

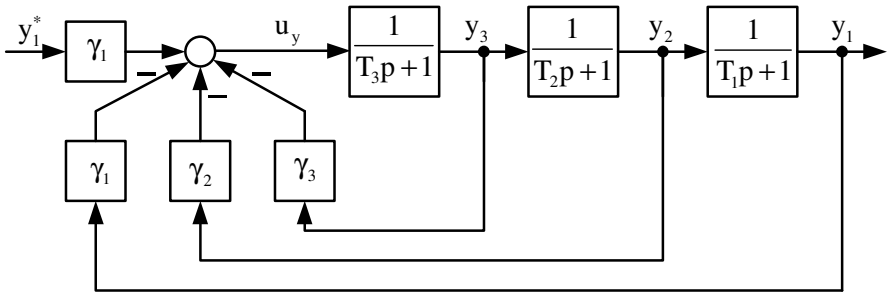
$$py_2 = -\frac{1}{T_2}y_2 + \frac{1}{T_2}y_3$$

$$py_3 = -\frac{1}{T_3}y_3 + \frac{1}{T_3}u_y$$

Знайдемо коефіцієнти модального регулятора, рівняння якого має вигляд

$$u_y = \gamma_1(y_1^* - y_1) - \gamma_2 y_2 - \gamma_3 y_3.$$

Структурна схема модальної системи керування



$$py_1 = -\frac{1}{T_1}y_1 + \frac{1}{T_1}y_2$$

$$py_2 = -\frac{1}{T_2}y_2 + \frac{1}{T_2}y_3$$

$$py_3 = -\frac{\gamma_1}{T_3}y_1 - \frac{\gamma_2}{T_3}y_2 - \frac{\gamma_3+1}{T_3}y_3 + \frac{\gamma_1}{T_3}y_1^*$$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{T_1}+p\right) & \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{T_2}+p\right) & \frac{1}{T_2} \\ -\frac{\gamma_1}{T_3} & -\frac{\gamma_2}{T_3} & -\left(\frac{\gamma_3+1}{T_3}+p\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(p) = -\left(\frac{1}{T_1}+p\right)\left(\frac{1}{T_2}+p\right)\left(\frac{\gamma_3+1}{T_3}+p\right) - \frac{\gamma_1}{T_1T_2T_3} - \left(\frac{1}{T_1}+p\right)\frac{\gamma_3}{T_2T_3} =$$

$$= -\left(\frac{1}{T_1T_2} - \frac{1}{T_2}p - \frac{1}{T_1}p - p^2\right)\left(\frac{\gamma_3+1}{T_3}+p\right) - \frac{\gamma_1}{T_1T_2T_3} - \frac{\gamma_2}{T_1T_2T_3} - \frac{\gamma_2}{T_2T_3}p =$$

$$= -\frac{\gamma_3+1}{T_1T_2T_3} - \frac{\gamma_3+1}{T_2T_3}p - \frac{\gamma_3+1}{T_1T_3}p - \frac{\gamma_3+1}{T_3}p^2 - \frac{1}{T_1T_2}p - \frac{1}{T_2}p^2 - \frac{1}{T_1}p^2 - p^3 -$$

$$-\frac{\gamma_1}{T_1T_2T_3} - \frac{\gamma_2}{T_1T_2T_3} - \frac{\gamma_2}{T_2T_3}p = 0$$

$$p^3 + \frac{(\gamma_3+1)T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3}{T_1T_2T_3}p^2 + \frac{(\gamma_3+1)(T_1+T_2) + T_3 + \gamma_2T_1}{T_1T_2T_3}p + \frac{\gamma_3+1+\gamma_1+\gamma_2}{T_1T_2T_3} =$$

$$= p^3 + 3\omega_0p^2 + 3\omega_0^2p + 3\omega_0^3$$

$$\frac{1}{T_3}\gamma_3 + \frac{T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3}{T_1T_2T_3} = 3\omega_0$$

$$\frac{T_1+T_2}{T_1T_2T_3}\gamma_3 + \frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_2 + \frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3} = 3\omega_0^2$$

$$\frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_3 + \frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_2 + \frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_1 + \frac{1}{T_1T_2T_3} = 3\omega_0^3$$

Будемо вважати, наприклад, $T_1 > T_2 > T_3$ і оберемо час керування $t = T_2$. Згідно з рис.2.1 для системи третього порядку перехідний процес закінчується в момент часу $\omega_0 t = \omega_0 T_2 = 9$. Тоді $\omega_0 = 9/T_2$, а система алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів зворотних зв’язків прийме вигляд

$$\frac{1}{T_3}\gamma_3 = \frac{27}{T_2} - \frac{T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3}{T_1T_2T_3};$$

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1T_2T_3}\gamma_3 + \frac{1}{T_2T_3}\gamma_2 = \frac{243}{T_2^2} - \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3};$$

$$\frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_3 + \frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_2 + \frac{1}{T_1T_2T_3}\gamma_1 = \frac{81}{T_2^2} - \frac{1}{T_1T_2T_3},$$

звідки

$$\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ \ \gamma_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \ \gamma_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Контрольні запитання

1.Що таке модальне керування?

2.Метод стандартних коефіцієнтів при модальному керування.

3.Біноміальні стандартні форми розподілу коренів характеристичного рівняння.

4.Стандартні форми Баттерворта розподілу коренів характеристичного рівняння.

5.Стандартні форми, що забезпечують мінімум лінійної квадратичної інтегральної оцінки.

Тема 3.КОНЦЕПЦІЇ ЗВОРОТНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ. ВЛАСТИВОСТІ СИМЕТРІЇ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

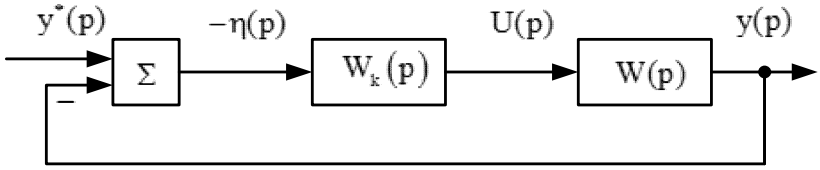
Проблема синтезу систем автоматичного керування з необхідними динамічними властивостями в тій чи іншій мірі пов'язана з концепціями зворотних задач динаміки, в результаті розв’язання яких по заданому закону руху системи визначаються сили або впливи, що керують, під дією яких цей рух здійснюється. У найширшому розумінні зміст зворотних задач динаміки включає визначення законів керування рухом динамічних систем і їх параметрів за умови відтворення призначених траєкторій.

Визначення законів керування рухом динамічних систем становить зміст структурно-алгоритмічного синтезу САК. З іншого боку, визначення параметрів динамічної системи є завданням параметричного синтезу, коли структура системи керування передбачається відомою апріорі. Обидві ці завдання становлять основу теорії автоматичного керування. Незважаючи на те, що зворотні задачі динаміки мають давню і багату історію, в даний час вони набувають все більш широке розуміння і тлумачення. Зокрема, за останнє десятиліття ними завойовані міцні позиції в теорії автоматичного керування (ТАК). Суть таких завдань полягає в побудові замкнених САК, які здійснюють рух призначеними траєкторіями (траєкторіями незбуреного руху) за допомогою законів керування зі зворотними зв'язками за змінним стану керованих об'єктів.

В процесі розвитку класичної та сучасної ТАК незалежно від досягнень в області розв’язань зворотних задач динаміки розроблено безліч практичних

прийомів і методів створення та розрахунку САК різної природи і призначення. До них в першу чергу слід віднести частотні і кореневі методи, а також задачі я аналітичного конструювання оптимальних регуляторів за мінімумом інтегральних функціоналів якості, що розглянуті в першому розділі. В будь-якій постановці проблеми синтезу з використанням перерахованих методів кінцевою метою є визначення таких структур і параметрів САК, при яких процеси динаміки систем протікають по запропонованим законам або максимально наближаються до процесів, що протікають в деякій еталонній моделі, найбільшою мірою відповідає вимогам технічного завдання на проектування. Аналогічна мета переслідується розв’язанням зворотних задач динаміки. Це дозволяє зробити висновок про те, що методи синтезу САК, що застосовуються в теорії автоматичного керування, прямо або побічно пов'язані з концепціями зворотних задач динаміки. У кожному з них в явному вигляді або побічно задана еталонна модель незбуреного руху і потрібно визначити закон керування в функції змінних стану керованого об'єкта, що забезпечує рух точки, що зображує, заданими траєкторіями.

Розглянемо класичну задачу теорії автоматичного керування, змістом якої є визначення структури та параметрів закону керування. За відомою передавальною функцією об'єкта керування W(p) потрібно знайти передавальну функцію керуючого пристрою $W_к(p)$ таку, щоб замкнена система автоматичного керування мала бажану передавальну функцію Ф * (p). У такій постановці завдання бажана траєкторія руху або необхідні динамічні властивості системи, яка синтезується, задані виглядом передавальної функції Ф*(p). Шуканим є закон керування, заданий у вигляді передавальної функції керуючого пристрою $W_к(p)$. Сукупність об'єкта керування і керуючого пристрою утворює замкнену САК. Визначення закону керування і його параметрів у вигляді передавальної функції $W_к(p)$ при наявних вихідних даних відповідає змісту зворотних задач динаміки. Структурна схема синтезуємої системи приведена на рисунку



Передавальна функція замкнутої системи

$$\Phi(p) = \frac{W_к(p)W(p)}{1 + W_к(p)W(p)}.$$

Підставивши замість Ф(p) задану передавальну функцію замкненої системи Ф*(p) і розв’язавши отримане рівняння щодо $W_к(p)$, знайдемо шуканий закон керування у вигляді передавальної функції

$$W_к(p) = \frac{\Phi^*(p)}{W(p)(1 - \Phi^*(p))} \quad . \qquad (3.1)$$

Вираз (3.1) формально вирішує задачу синтезу замкнутої системи за умови реалізації заданої передавальної функції. Це свідчить про те, що

традиційна задача теорії автоматичного керування формулюється і вирішується як зворотна задача динаміки в її безпосередньому розумінні. Бажана траєкторія руху синтезованої системи задається у вигляді передавальної функції Ф*(р) деякої еталонної моделі, а шуканий закон керування визначається також у вигляді передавальної функції $W_к(p)$ або рівнянням $U(p)=W_к(p)[y^*(p)-y(p)]$.

Розглянемо синтез системи керування, що забезпечує рух зображаючої точки по призначеної траєкторії, як розв'язаннязворотної задачі динаміки в іншій постановці.

Нехай рух керованого об'єкта підпорядковується диференціальним рівнянням

$$py_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k + m_n u \ , \quad (i=1,\ldots,n). \tag{3.2}$$

Система n рівнянь (3.2) може бути приведена до одного диференціального рівняння n-го порядку

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k y_1 = m_n u \, . \tag{3.3}$$

Потрібно визначити керуючий вплив u, який забезпечить рух координати $y_1(t)$ по траєкторії $y_1^*(t)$.

Відповідно до основної ідеї зворотних задач динаміки визначимо керуючий вплив з рівняння (3.3)

$$u = m_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} a_k p^k y_1(t) \, . \tag{3.4}$$

Підставимо в (3.4) замість поточного значення змінної $y_1(t)$ її бажане значення $y_1^*(t)$

$$u^* = m_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} a_k p^k y_1^*(t) \, . \tag{3.5}$$

З виразу (3.5) випливає, що шуканий керуючий вплив може бути знайдено як функцію часу в результаті виконання кінцевого числа операцій: диференціювання, складання, множення і т.д.

На підставі співвідношення (3.5) формулюються загальні положення визначення керуючих впливів, що забезпечують рух системи за призначеною траєкторії. З зіставлення виразів (3.3) і (3.5) випливає, що операції формування шуканого керування протилежні відповідним операціям, що визначають структуру математичної моделі керованого об'єкта. Інтегруванню в математичній моделі об'єкта відповідає диференціювання в алгоритмі керування, підсумовуванню відповідає віднімання, множенню - ділення. В кінцевому підсумку вихідна u* і вхідні y_1^* змінні структурної схеми алгоритму керування є відповідними оберненими змінним u, y_1 математичної моделі керованого об'єкта. Таким чином, структурна схема керуючої частини системи може бути отримана на підставі структурної схеми об'єкта керування в результаті обернення операцій і відповідних змінних.

На рис.3.1 приведена структурна схема системи керування, побудована відповідно до рівнянь (3.3) і (3.4) при n = 2.

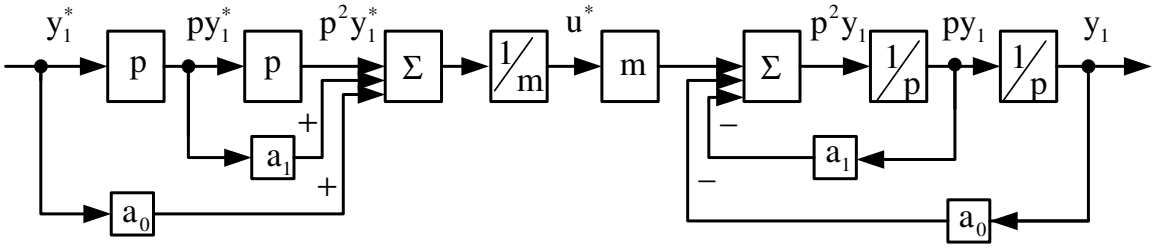


Рисунок 3.1 - Структурна схема системи

Вхідною змінною схеми є траєкторія незбуреного руху y_1*, а вихідною - фактична змінна y_1. Якщо виконати обернення відповідних операцій і змінних, то зміниться спрямованість схеми, тобто вихід системи стане її входом і навпаки, а загальна конфігурація структурної схеми не зміниться. В результаті такого обернення структурна схема набуде вигляд, зображений на рис. 3.2.

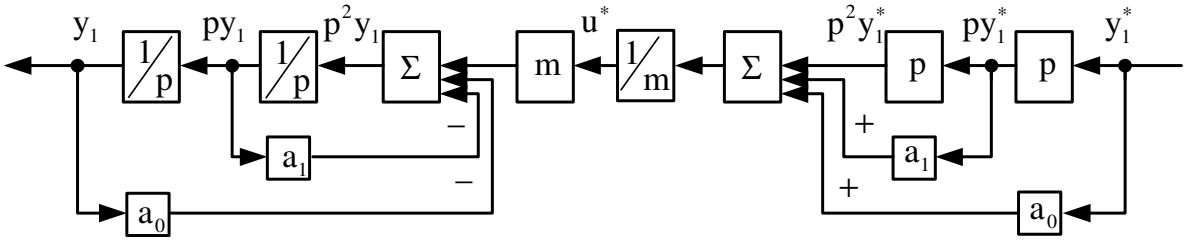


Рисунок3.2 – Структурна схема оберненої системи

Таким чином, можна сформулювати наступне правило: алгоритм формування керуючого впливу будується за принципом симетрії структури і обернення операцій по відношенню до структури і групи операцій, відповідних математичній моделі керованого процесу.

Наведені структурні схеми наочно ілюструють властивості симетрії, притаманні системам автоматичного керування. Ці властивості однозначно визначають структуру і параметри керуючої частини системи і складають методологічну основу для відшукання алгоритмів керування рухом динамічних об'єктів за призначеною траєкторією. При цьому завдання конструювання алгоритмів керування повністю відповідає концепціям зворотних задач динаміки і зводиться до відшукання керуючої функції u*, що забезпечує рух об'єкта по визначеній траєкторії y_i*. У розглянутій постановці рішення зворотної задачі динаміки дає можливість визначення програмних керувань, які забезпечують системі наперед задані динамічні властивості, якщо вказану траєкторію руху задати рівнянням

$$py_1^*(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t), \qquad (3.6)$$

де $x_i(t)$ – відомі функції часу; c_i – постійні, що однозначно визначають початковий стан системи.

Шляхом підстановки виразу (3.6) в (3.5) визначимо шукане програмне керування

$$u^*(t)=m^{-1}[c_1\sum_{k=0}^{n}a_k x_1^{(k)}(t)+...+c_n\sum_{k=0}^{n}a_k x_n^{(k)}(t)]. \qquad (3.7)$$

Вельми суттєвим є те, що керування виду (3.7) забезпечують реалізацію тільки таких траєкторій руху, структура яких як функцій часу відповідає структурі розв'язання рівняння (3.3) при u=0. Звідки витікає висновок, що програмні керування реалізуються лише при дотриманні умов відтворюваності назначених траєкторій.

Більш переважною є реалізація призначених траєкторій руху в замкнутих системах на підставі законів керування зі зворотними зв'язками. Для відшукання таких законів необхідно навести функції часу $c_i(t)$ через змінні стану керованого об'єкта. Таке завдання легко вирішується для функцій $x_i(t)$, підпорядкованих співвідношенню

$$p^k x_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\rho_{ik}x_i(t),(k=0,l,...,n). \qquad (3.8)$$

Якщо $x_i(t)$ в виразі призначеної траєкторії (3.6) відповідає умові (3.8), то програмне керування (3.7) набуває вигляду

$$u^*(t)=m^{-1}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i c_i x_i(t)\ , \qquad (3.9)$$

де коефіцієнти γ_i, визначаються виразами

$$\gamma_i=\sum_{k=0}^{n}a_k\rho_{ik}\ , \quad (i=1,...,n)\ .$$

Для побудови закону керування зі зворотними зв'язками на основі програмного керування (3.9) необхідно виразити функції $c_i x_i(t)$ через змінні стану системи (3.3). Такими змінними є $p^k y_i(t)$, (k=0,l,..., n-1). Тоді відповідно до умови відтворюваності призначеної траєкторії руху $y_i(t)=y_i^*(t)$ можливо отримати наступний вираз

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\rho_{ik}x_i(t)=y^{(k)}(t), \quad (k=0,1,\ldots n-1) \qquad (3.10)$$

Розв'язавши систему рівнянь (3.10) відносно шуканих змінних $c_i x_i(t)$, визначимо

$$c_i x_i(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{ik}\rho^k y_1(t), \quad (i=1,\ldots,n)\ , \qquad (3.11)$$

де β_{ik}– постійні коефіцієнти.

Підставивши вирази (3.11) в (3.9), отримаємо закон керування зі зворотним зв'язком

$$u^*(y_1)=m^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_k p^k y_1. \qquad (3.12)$$

Траєкторія незбуреного руху y*(t), задана рівнянням (3.6), реалізується в замкнутій системі з алгоритмом керування (3.12), в якому коефіцієнти зворотних зв'язків за змінними y_i, $py_i,\ldots,p^{n-1}y_i$визначаються виразом

$$\delta_k=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\beta_{ik}, \quad (k=0,1,\ldots,n-1). \qquad (3.13)$$

Таким чином, в результаті розв'язання зворотної задачі динаміки на

основі принципу симетрії отримано алгоритм керування замкнутої системи в аналітичному вигляді як функція змінних стану і параметрів об’єкта керування, а також відомих функцій часу, що визначають вид призначеної траєкторії руху з урахуванням початкового стану системи.

Контрольні запитання

1.Що таке зворотні задачі динаміки АС?

2.Розв’язання задачі синтезу замкненої системи за умови реалізації заданої передавальної функції.

3.Визначення керуючої дії на підставі принципу симетрії.

4.Сформулюйте принцип симетрії.

5.Визначення програмних керувань шляхом розв’язання зворотних задач динаміки.

6.Визначення законів керування в замкнених системах шляхом розв’язання зворотних задач динаміки.

Тема 4.КОНЦЕПЦІЯ ЗБУРЕНОГО-НЕЗБУРЕНОГО РУХУ

4.1. Рівняння збуреного та незбуреного руху системи керування

Необхідність урахування різної фізичної природи об'єктів, що входять до складу високотехнологічних процесів і комплексів, значно ускладнює математичний опис системи керування. Уникнути цього можливо, якщо замість реальних фізичних змінних використовувати їх відносні одиниці. Перехід до системи відносних одиниць шляхом спрямованого нормування дозволяє оперувати змінними в безрозмірній формі. Таке уявлення крім технічних переваг має також важливе методологічне значення. Різні по фізичному складу об'єкти описуються однотипними математичними моделями, що значно спрощує їх дослідження. До таких об'єктів можуть бути застосовані загальні методи і принципи автоматичного керування. Закони та закономірності, покладені в основу обчислювальних процедур, можуть бути перенесені на широкий клас об'єктів.

Яким чином здійснюється нормування ЕМС, буде розглянуто в дисциплінах наступного семестру. При викладі же основ синтезу оптимальних систем будемо припускати, що така процедура вже виконана, і під змінними об'єкта в подальшому будуть матися на увазі їх відносні значення.

Концепція збуреного – незбуреного руху і вчення О.М. Ляпунова про стійкість лягли в основу більшості методів синтезу систем оптимального керування, і їх основні поняття і положення використовуються в подальшому при розробці нової методології структурно-алгоритмічного синтезу систем, стійких при необмеженому збільшенні коефіцієнта підсилення.

Розглянемо об'єкт керування, рух якого описується системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(y_1,...,y_n,u_1,...,u_j,t), \quad k = 1,...,n. \qquad (4.1)$$

В (4.1) $y_1,...,y_n$ – змінні стану ОК, сукупність яких утворює n-мірний вектор стану $y=(y_1,...,y_n)$; $u_1,...,u_j$ – керуючі впливи, що утворюють j-мірний вектор керування $u=(u_1,...,u_j)$; f_k – відомі функції, визначені для будь яких значень y та u, – безперервні та безперервно-диференціюємі необхідне число раз по y, u та t. Вектор u може бути безперервною, кусково-безперервною або кусочно-гладкою функцією.

Розв'язання системи (4.1) уявляє собою закон руху точки, що зображує, у фазовому просторі, а шлях, що описується цією точкою, траєкторією руху. Такий рух має назву керованого. Якщо праві частини (4.1) не містять в явному вигляді u, то рішення системи (4.1) буде вільним рухом.

На керування та змінні стану накладено обмеження, що виражають обмежені ресурси сигналів керування та припустимі межі зміни змінних стану:

$$|y_k(t)| \le y_{k\,max}(t); \qquad |u_e(t)| \le u_{e\,max}(t).$$

Серед усіх траєкторій руху системи (4.1) завжди можливо виділити шуканий рух

$$y^* = (y_1^*,...,y_n^*), \tag{4.2}$$

який здійснюється ОК під дією бажаного (програмного) керування

$$u^* = (u_1^*,...,u_j^*). \tag{4.3}$$

Реальний рух завжди відрізняється від бажаного за рядом причин:

– неточне знання початкових умов функціонування об'єкта;
– неточна інформація про збурення, що діють на систему;
– неточна реалізація бажаного керування;
– нестабільність параметрів ОК та т.і.

При синтезі систем оптимального керування слід розглядати тільки такі бажані траєкторії руху, які фізично можуть бути реалізовані. Рух точки, що зображує, фізично реалізуємою траєкторією буде стійким, а фізично неможливим рухам відповідають нестійкі рішення.

Концепція збуреного-незбуреного руху пов'язує стійкість розв'язання системи (4.1) з можливістю досягнення бажаної траєкторії руху.

Реальний рух ОК відрізняється від бажаного на величину відхилення

$$\eta_k(t) = y_k(t) - y_k^*(t), \qquad k=1,...,n; \tag{4.4}$$

$$U_e(t) = u_e(t) - u_e^*(t), \qquad e=1,...,j, \quad j \le n. \tag{4.5}$$

Якщо в системі рівнянь (8.1) змінні стану $y_к$ та керуючі впливи u_e замінити їх відхиленнями (8.4) і (8.5), то в новому фазовому просторі система (8.1) запишеться як

$$\frac{d\eta_k}{dt} = H_k(\eta_1,...,\eta_n, U_1,...,U_j, t), \tag{4.6}$$

де

$$H_k(\eta_1,...,\eta_n, U_1,...U_n, t) = f_k(y_1^*+\eta_1,...,y_n^*+\eta_n, u_1^*+U_1,...,u_j^*+U_j, t) -$$
$$- f_k(y_1^*,...,y_n^*, u_1^*,...,u_j^*, t), \quad k=1,...,n, \quad j \le n.$$

За термінологією Ляпунова систему (4.6) називають системою диференційних рівнянь збуреного руху, або системою диференційних рівнянь у відхиленнях, а рішення (4.2) та (4.3) – незбуреним рухом.

Якщо функції $H_k (k = 1,...,n)$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $y_1^*,...,y_n^*$; $u_1^*,...,u_j^*$, то рівняння (4.6) набудуть вид

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)\eta_k + \sum_{e=1}^{j} m_{ie}(t)U_e + g_i(\eta_1,...,\eta_n, U_1,..., U_j, t), \quad i = 1,...n, \quad j \le n, \tag{4.7}$$

де

$$p = \frac{d}{dt}; \quad b_{ik}(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right|^*; \quad m_{ie}(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_e}\right|^*,$$

символ $\Big|^*$ означає, що частинні похідні функції f беруться в точці $y_i = y_i^*$, $u_e = u_e^*$, $g_i(\eta_1,...,\eta_n, u_1,..., u_j, t)$ – функції, що є членами ряду Тейлора другого та більш високих порядків малості.

Виключаючи в (4.7) нелінійні члени, це рівняння в першому наближенні можливо представити в вигляді

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t)\eta_k + \sum_{e=1}^{j} m_{ie}(t)U_e, \quad i = 1,...,n, \quad j \le n. \tag{4.8}$$

У найзагальнішому випадку коефіцієнти b_{ik} і m_{ie} є відомими або випадковими функціями часу. Вони характеризують змінні параметри ЕМС, до яких відносяться постійні часу, і коефіцієнти підсилення. Якщо зміна цих параметрів не виходить за межі діапазону, що допускає безаварійну роботу ЕМС, то при синтезі систем керування коефіцієнти b_{ik} і m_{ie} можуть бути прийняті постійними і відповідними номінальним параметрам ОК, тому що такі зміни не призводять до порушення стійкості керованого руху.

Керуючий вплив u_e при подальшому розгляді приймається скалярною функцією, що скалярно входить в систему, тобто ЕМС розглядається як однозв'язний об'єкт з одним входом, на який подається один сигнал керуванрнря. Такі застереження обумовлені лише досліджуваним класом об'єктів і не пов'язані з обмеженими можливостями методології синтезу, що викладаєтья.

З урахуванням сказаного, рівняння (4.8) набуває вигляду

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + m_n U, \quad i = 1,..., n. \tag{4.9}$$

Слід зазначити, що фазові простори реального руху y(t), бажаного руху y*(t) і збуреного руху η(t) мають однакову розмірність.

Вираз (4.4) визначає перенесення початку координат в точку з координатами $y_1^*,...,y_n^*$, а збіжності рухів y і y* відповідає нульове рішення системи (4.9)

$$\eta_1=0 \quad ;...; \quad \eta_n=0.$$

Таким чином, відповідно до концепції збуреного-незбуреного руху задача стійкості рішення

$$y_1 = y_1^*;\ ...;\ y_n = y_n^*$$

переходить в задачу стійкості нульового рішення

$$\eta_1=0\ ;...;\ \eta_n=0. \qquad (4.10)$$

Збіжність рухів y та y^* забезпечується стабілізуючим керуванням U. Таким чином, реальне керування

$$u(t) = u^*(t) + U(t) \qquad (4.11)$$

складається з бажаного u*(t) і стабілізуючого U(t) керувань. Бажане керування u*(t) забезпечує основний (бажаний) рух системи y*, а стабілізуюче керування U(t) усуває відхилення реального руху y від бажаного y*. Однак, таке уявлення керуючого впливу у вигляді (4.11) носить умовний характер. Розглянемо реалізацію такого керування на прикладі узагальненої функціональної схеми СК (рис. 4.1), рух якої описується рівняннями вигляду (4.9).

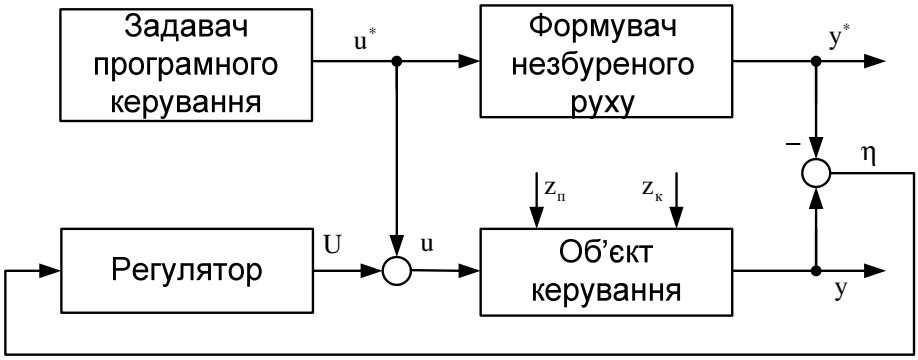


Рисунок 4.1– Узагальнена функціональна схема системи керування

Формувач незбуреного руху, який представляє собою модель об'єкта керування з базовими параметрами, під дією задавача програмного керування формує траєкторію незбуреного руху y*. Програмне керування u*, поступаючи на об'єкт керування спільно з параметричними $z_п$ і координатними $z_к$ збуреннями, викликає реальний рух y, координати якого в загальному випадку відрізняються від координат незбуреного руху y* на значення координат збуреного руху η. Координати збуреного руху надходять на регулятор, який виробляє стабілізуюче керування U, що забезпечує в свою чергу збіжність нульового рішення (4.10) системи (4.9).

4.2 Два класи задач синтезу оптимальних систем

З принципу дії розглянутої СК слід, що математичні завдачі синтезу оптимальних систем діляться на два класи.

1. Задачі, пов'язані з визначенням і розрахунком виду оптимального перехідного процесу. В результаті вирішення цих задач відшукується програмне керування u* (t), яке формує бажані траєкторії незбуреного руху y*, як відома функція часу. Системи, що задовольняють вирішення цього завдання,

називаються оптимальними по режиму керування. До них відносяться і системи, оптимальні за швидкодією.

2. Задачі, в результаті рішення яких визначається стабілізуюче керування, що забезпечує збіжність істинного і незбуреного руху. Системи, синтезовані в цьому випадку, називаються оптимальними по перехідному процесу.

В обох класах задача трактуються як двоточкова гранична проблема, яка може бути вирішена одним з методів варіаційного числення.

Задача другого класу відома як задача АКР і суть її полягає у визначенні варіаційними методами керуючого впливу, який мінімізує функціонал, що характеризує відхилення траєкторії істинного руху системи від бажаного. Поряд з очевидною спільністю між задачами зазначених класів є велика різниця. В процесі АКР відшукується закон керування в його аналітичній формі як деяка функція фазових координат вихідної системи. Іншими словами, здійснюється конструювання диференціального рівняння оптимального регулятора на відміну від задач першого класу, де рішенням є сукупність відомих функцій часу, на яких ґрунтується розрахунок і побудова пристроїв програмування. Таким чином, синтез систем оптимального керування складається з послідовного вирішення задач першого і другого класів. Спочатку для заданого об'єкта керування при існуючих обмеженнях відшукується оптимальна траєкторія руху системи, потім шляхом АКР визначається диференціальне рівняння (алгоритм керування) регулятора, яке гарантуватиме мінімальне відхилення траєкторій руху ОК від знайденої оптимальної траєкторії.

Ефективність роботи систем програмного керування оцінюється, як правило, інтегральним функціоналом якості, в якому підінтегральна функція (інтегрант) визначається в першу чергу фізичною природою об'єкта керування. При синтезі систем стабілізації, до складу яких входить ОК і регулятор, критерій (показник) якості, як правило, не пов'язаний безпосередньо з фізичною природою об'єкта керування, але повинен враховувати інженерні вимоги до процесу керування (час перехідного процесу від істинного руху до програмного, перерегулювання при цьому русі, усталену помилку в процесі відтворення програмного руху). Однак в теорії оптимального керування традиційно беруть критерій якості заданим, залишаючи питання вибору його структури і параметрів за межами цієї теорії.

При синтезі стабілізуючих керувань використовують рівняння першого наближення (4.8) у зв'язку з тим, що стабілізуюче керування призначене для усунення відхилень (4.4), а при малих значеннях цих відхилень рівняння (4.7) і (4.8) мають близькі рішення, тому що функції $g_i (i = 1,...,n)$ залежать від других і вищих ступенів цих відхилень. Лінійний характер рівнянь першого наближення дозволяє істотно спростити процедуру синтезу стабілізуючих керувань.

Якщо ж необхідна траєкторія руху відома заздалегідь, необхідність у вирішенні задачі першого класу відпадає. Тоді в керуючому впливі u виділити в явному вигляді компоненти u* і U не представляється можливим, та в цьому й немає необхідності. Якщо виконана умова (4.10), то реальне керування забезпечує рух системи по бажаній траєкторії y*.

У початковий момент часу t=0 стан системи характеризується початковими відхиленнями $\eta_1(0),...,\eta_n(0)$, які можуть приймати практично будь-які можливі для конкретного ОК значення. Кінцевий момент часу $t \to \infty$ характеризується рівністю нулю всіх відхилень $\eta_1(\infty) = ... = \eta_n(\infty) = 0$. Такому різноманіттю початкових умов відповідає таке ж різноманіття рішень системи (4.9), а відповідно і сімейство траєкторій збуреного руху, врахувати які повністю фізично неможливо. Це значно ускладнює задачу синтезу системи керування.

Вчення Ляпунова про стійкість дозволяє судити про властивості траєкторій збуреного руху, не вдаючись до інтегрування рівнянь (4.9), і дає рекомендації щодо раціонального вибору структури і параметрів регулятора.

Якщо стабілізуюче керування синтезовано виходячи з умови досяжності деяким показником якості, що характеризує мету керування, екстремального значення і рішення (4.10) при цьому буде стійким, то це означає, що система керування сама обере той режим руху до бажаної траєкторії, який цього рішення відповідає. Якщо рішення (4.10) нестійке, то такий режим руху виявиться фізично неможливим. Питання вибору показника якості при синтезі алгоритмів стабілізуючого керування буде розглянуто нижче.

Фізичний сенс понять збуреного і незбуреного руху може бути розглянутий на прикладі структурної схеми узагальненої замкнутої системи автоматичного керування (рис. 4.2).

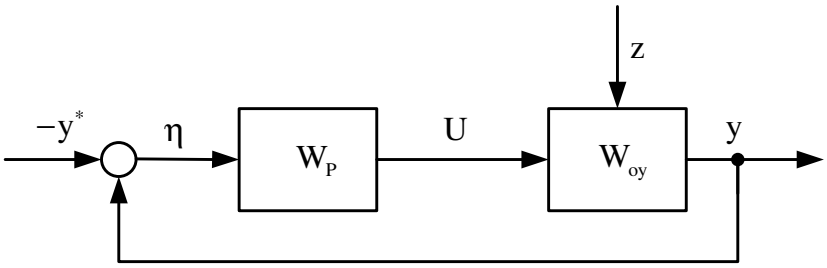


Рисунок4.2– Узагальнена структура замкненої системи

Об’єкт керування з передавальною функцією $W_{ок}$ характеризується n-мірним вектором y стану, компоненти якого $(y_1,...,y_n)$ однозначно визначають істинний рух об’єкта. Цей рух здійснюється під дією векторів керуючих $U = (U_1,...,U_j)$, збурюючих $z = (z_1,...,z_r)$ та задавальних $y^* = (y_1^*,...,y_n^*)$ впливів. Природа збурюючих впливів може бути різною. Це можуть бути як зміна параметрів об’єкта керування, так і координатні збурення. Вектор керуючого впливу формується регулятором в функції відхилень $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ істинного руху системи $y = (y_1,...,y_n)$ від заданого (незбуреного) $y^* = (y_1^*,...,y_n^*)$. Закон зміни U в функції відхилень η називають алгоритмом керування.

Концепція збуреного-незбуреного руху Ляпунова значно спрощує математичний опис ОК, т.я. при синтезі алгоритмів керування з розгляду виключаються вектори координат незбуреного руху y^*, істинного руху y і збурюючих впливів z. Тобто регулятор формує керуючий вплив в функції

відхилень $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ істинного руху системи від незбуреного не залежно від того, чим ці відхилення викликані.

Основні положення концепції збуреного-незбуреного руху лягли в основу нової методології структурно-алгоритмічного синтезу систем оптимального керуваеея, стійких при необмеженому збільшенні коефіцієнта підсилення.

4.3 Функціонали, варіації та їх властивості

Динамічні властивості синтезованих оптимальних систем істотно залежать від виду оптимізуючого функціоналу, який є критерієм якості керування. Загальних правил вибору критеріїв якості для різних керованих об'єктів не існує і призначення критерію оптимальності в кожному конкретному випадку є самостійною задачею. Функціонал якості повинен вибиратися таким чином, щоб він, з одного боку, найкращим чином характеризував мету керування, а з іншого боку, конкретна варіаційна задача повинна бути аналітично вирішуваною.

Задачею варіаційного числення є відшукання функцій, що доставляють екстремальне значення деяким функціоналам. Функціонал можна розглядати як функцію особливого роду, в якій роль незалежної змінної грає інша функція.

В даний час в теорії та практиці оптимального керування широкого поширення набули інтегральні функціонали

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(\eta_1,...,\eta_n, U_1,..., U_j)dt = \text{extremum}, \qquad (4.1)$$

де $\eta_1,...,\eta_n$ – компоненти вектора стану об’єкта керування в просторі координат збуреного руху;

$U_1,..., U_j$ – складові вектора керуючого впливу.

Для систем керування, динаміка яких описується диференціальними рівняннями збуреного руху (4.9), функціонал (4.1) задає мету керування, яка характеризується видом функції F.

Зупинимося докладніше на критеріях оптимальності, найбільш прийнятних для систем керування електроприводами.

Якщо в функціоналі (4.1) підінтегральний вираз F = 1, то

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 = T. \qquad (4.2)$$

Мінімізація I_1 відповідає найменшому часу T переходу системи (4.9) з початкового положення η(0) в кінцеве η=0, при цьому керування належить деякій замкнутій області, тобто обмежена по модулю $|U| \le U_{max}$.

Оптимальне за швидкодією керування має сенс і може бути реалізовано лише в разі усталеного незбуреного руху, коли початкова і кінцева точки траєкторії зафіксовані. Таке керування застосовується в електроприводах позиційних механізмів, які здійснюють переміщення робочого органу з вихідного положення в кінцеве.

Для електроприводів стеження керування, оптимальне за швидкодією, позбавлене сенсу в результаті рухливості кінців траєкторій. Якість керування в цьому режимі зручно задавати інтегральними квадратичними функціоналами.

Якщо інтегрант функціоналу (4.1) $F = \eta_i^2$, то

$$I_2 = \int_0^\infty \eta_i^2 dt = \min . \qquad (4.3)$$

Цей критерій характеризує площу, обмежену кривою квадрата відхилення координати y_i істинної траєкторії руху системи від координати y_i^* заданої траєкторії. Поряд з критерієм, де в якості інтегранта використовують квадратичну помилку, знаходять застосування функціонали, що характеризують мінімум абсолютного відхилення:

$$I_3 = \int_0^\infty |\eta_i| dt = \min . \qquad (4.4)$$

Функціонали (4.3) і (4.4) погано враховують коливальність перехідного процесу, тобто нічого певного не можна сказати про характер його протікання, чи є він коливальним або монотонним.

З урахуванням недоліків критеріїв (4.3) і (4.4) був запропонований узагальнений інтегральний квадратичний критерій

$$I_4 = \int_0^\infty \left(w_1 \eta_i^2 + w_2 (\dot{\eta}_i)^2 + ... + w_n \left(\eta_i^{(n-1)}\right)^2 \right) dt = \min . \qquad (4.5)$$

В силу системи (4.9) функціонал (4.5) може бути перетворений до вигляду

$$I_5 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} w_i \eta_i^2 dt = \min . \qquad (4.6)$$

Інтеграли (4.5) і (4.6) являють собою зважену за допомогою вагових коефіцієнтів w_i (i=l,...,n) суму площ, обмежених квадратами відхилень координат істинного руху від координат програмного руху по кожній змінній стану. Сенс цих критеріїв полягає в тому, що вони забороняють тривале існування не тільки відхилення основної регульованої змінної η_i, але і її похідних. Тому мінімізація функціоналів (4.5) і (4.6) забезпечує швидке і плавне протікання перехідних процесів.

Інтегральні критерії (4.3) - (4.6) не враховують того, що в системі може мати місце обмеження потужності сигналу керування. Крім того, система сама може мати обмежені енергетичні ресурси. Ці обмеження враховують функціонали вигляду

$$I_6 = \int_0^\infty U^2 dt = \min . \qquad (4.7)$$

$$I_7 = \int_0^\infty |U| dt = \min . \qquad (4.8)$$

Функціонали (4.3) і (4.4) при наявності обмежень (4.7) і (4.8) приводяться до одного з функціоналів

$$I_8 = \int_0^\infty (\eta_i^2 + cU^2) dt . \qquad (4.9)$$

$$I_9 = \int_0^{\infty} (|\eta_i| + c|U|)dt . \qquad (4.10)$$

$$I_{10} = \int_0^{\infty} (\eta_i^2 + c|U|)dt . \qquad (4.11)$$

Введення в функціонал квадрата керуючого впливу фактично призводить до узагальненої інтегральної оцінки та інтеграл (4.9) може бути приведений до виду (4.5) або (4.6), що цілком природно, тому що обмеження керуючого впливу відповідає обмеженню всіх координат керованого об'єкта.

Перший доданок підінтегральної квадратичної форми функціоналу (4.9) має таке ж значення, що і в функціоналі (4.6). Введення під інтеграл доданка cU^2, з одного боку, означає досягнення оптимальності гасіння збуреного руху при обмеженні витрат енергії на керування, а з іншого - забезпечує пошук оптимального керування серед безлічі допустимих лінійних функцій. Таким чином, функціонали містять в собі не тільки основні динамічні властивості замкнутих систем, якими ті повинні володіти, а й визначають клас функцій, серед яких слід шукати оптимальне керування.

Мінімізація квадратичних функціоналів (4.3), (4.5) - (4.7), (4.9) здійснюється лінійними керуваннями, а для досягнення екстремального значення функціоналів виду (4.4), (4.8), (4.10), (4.11) з нелінійними інтегрантом слід застосовувати нелінійні закони керування.

У деяких літературних джерелах зазначено, що функціонал (4.3) мінімізується релейними керуваннями, однак, таке твердження видається спірним.

Різноманіття наведених функціоналів ще раз показує, що універсального критерію якості для різних систем не існує і закон керування, що синтезується, є оптимальним в сенсі мінімізації цілком певного функціоналу. Причому динамічні властивості системи, що синтезується, не завжди задовольняють бажаним, і процедуру синтезу за обраним критерієм доцільно доповнювати оцінкою таких прямих показників, як тривалість перехідного процесу, коливальність, максимальне перерегулювання, величина статичної помилки.

Зупинимося коротко на деяких властивостях функцій, функціоналів і варіацій, без яких неможливо виклад подальшого матеріалу. Розглянемо функцію f=x(t), кожному значенню аргументу якої відповідає певне значення x. Приростом аргументу функції називається різниця $\Delta t=t_1-t_2$.

Змінна величина $I = \int_{t_0}^{t_1} x(t)dt$ називається функціоналом, що залежить від функції x(t), якщо кожній функції x(t) (з деякого класу функцій) відповідає певне число I. Отже, кожному набору функцій $x_1(t),...,x_n(t)$, відповідатимуть числа $I_1,..., I_n$.

Приростом, або варіацією δx аргументу x(t) функціоналу I називається різниця між двома функціями $\delta x = x_2(t) - x_1(t)$.

Функція x(t) неперервна, якщо малій зміни t відповідає мала зміна x(t). Функціонал безперервний, якщо малій зміні x(t) відповідає мала зміна I. Якщо функціонал містить не тільки функцію, а й її похідні, поняття безперервності

функціонала ускладнюється. В цьому випадку функціонал безперервний, якщо малому приросту функції і її похідних відповідає малий приріст функціоналу.

Приріст функції x(t) визначається співвідношенням

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

Приріст функціоналу визначається аналогічно

$$\Delta I = I[x(t) + \delta x] - I[x(t)].$$

Лінійна по відношенню до Δt частина приросту функції називається диференціалом функції і позначається dx.

Лінійна по відношенню до δx частина приросту функціоналу називається варіацією функціонала і позначається δI.

Якщо диференційована функція x(t) досягає екстремуму в точці t_0 області визначення функції, то в цій точці dx=0.

Якщо функціонал I, який має варіацію, досягає екстремуму всередині області визначення на кривій $x_0(t)$, то в цьому випадку $\delta I = 0$.

Функції, на яких досягається екстремум функціоналу, називаються екстремалями.

Варіаційне числення можна розглядати як узагальнення диференціального обчислення для багатьох змінних. Тому методи вирішення варіаційних задач схожі з методами досліджень функцій на екстремум.

Функціонал I(x(t)) досягає мінімуму на $x_0(t)$, якщо його значення на будь-який близькій до $x_0(t)$ кривій x(t), що не менше, ніж $I(x_0(t))$, тобто

$$\delta I = I(x(t)) - I(x_0(t)) \geq 0.$$

Аналогічно визначаються функції, на яких реалізується максимум. В цьому випадку $\delta I \leq 0$ для всіх кривих, близьких до кривої $x_0(t)$.

Наведемо поняття близькості кривих. Криві $x_0(t)$ і x(t) близькі в сенсі близькості нульового порядку, якщо модуль різниці $x_0(t)$-x(t) малий. Криві $x_0(t)$ і x(t) близькі в сенсі близькості першого порядку, якщо модулі різниць $x_0(t)$-x(t) і $\dot{x}_0(t) - \dot{x}(t)$ малі. Криві $x_0(t)$ і x(t) близькі в сенсі близькості k-го порядку, якщо $\left|x_0^i(t) - x^i(t)\right| \leq \varepsilon$ (i = 0,1, ..., k), $x^i(t)$ - i-ая похідна, ε - досить мале число.

Якщо функціонал I(x(t)) досягає на кривій $x_0(t)$ екстремуму по відношенню до всіх кривим, близьким до $x_0(t)$ в сенсі близькості нульового порядку, то такий екстремум називається сильним.

Якщо функціонал досягає екстремуму лише по відношенню до кривих x(t), близьких до $x_0(t)$ в сенсі близькості першого порядку, то такий екстремум називається слабким. Якщо досягається сильний екстремум, то досягається і слабкий. У подальшому викладі передбачається слабкий екстремум.

Контрольні запитання

1.Фізичний сенс збуреного та незбуреного руху АС.

2.Що таке збурений, незбурений та реальний рух САК.

3.Спрощення математичного опису САК через концепцію збуреного-незбуреного руху.

4.Узагальнена функціональна схема САК в просторі збуреного руху.

Тема 5. МЕТОДИРОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

5.1 Рівняння Ейлера

Основна задача варіаційного обчислення - відшукання функцій, що доставляють екстремум функціоналу. Відповідь на це питання дає рівняння Ейлера, рішення якого є екстремаллю.

Знайдемо функцію, що доставляє мінімум функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)dt \qquad (10.1)$$

при закріплених граничних точках припустими функціями $x(t_0)=x_0$ и $x(t_1) = x_1$. Функцію $F(x, \dot{x}, t)$ приймають безперервною і двічі диференціюємою за усіма аргументам. Геометрична трактовка задачі приведена на рис. 5.1. Необхідно знайти рівняння такої лінії, що проходить крізь граничні точки $x(t_0)$ і $x(t_1)$, які, будучи підставленими в (5.1), доставляло б I мінімальне значення.

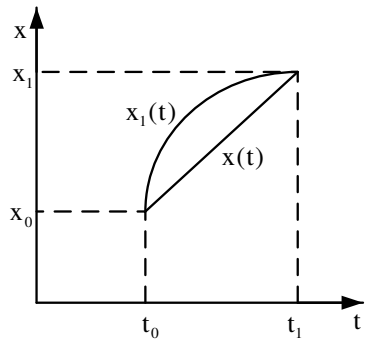


Рисунок 5.1 –Геометричне трактуваннявaріаційної задачі

Відомо, що необхідною умовою екстремуму є обернення в нуль варіації δI. Застосуємо це положення до розглянутого функціоналу (5.1). Припустимо, що екстремум досягається на функції x(t). Проваріюємо цю функцію і визначимо приріст функціоналу

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} F(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)dt. \qquad (5.2)$$

Варіація аргументу обрана таким чином, щоб $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, тобто щоб варіюєма лінія, що описується функцією $x_1(t) = x(t) + \delta x(t)$, проходила через точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$.

Розкладемо проварійовану функцію в ряд Тейлора

$$F(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)=F(x,\dot{x},t)+\left\{\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2F(x,\dot{x},t)}{\partial x^2}\delta x^2+2\frac{\partial^2F(x,\dot{x},t)}{\partial x\partial\dot{x}}\delta x\delta\dot{x}+\frac{\partial^2F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}^2}\delta\dot{x}^2\right\}+R_n, \quad (5.3)$$

де R_n– останок третього і більш високих порядків малості.

Член розкладання (5.3) в перших фігурних скобках називається першою варіацією, вона лінійна. Член розкладання в других фігурних скобках називається другою варіацією, вона нелінійна.

Для визначення екстремуму функціонала необхідно дослідити лінійну частину його прирощення, тобто першу варіацію. Вищими варіаціями можливо зневажати. Тоді варіація функціонала визначається виразом

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial x}\delta x dt+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}dt. \quad (5.4)$$

Проінтегруємо по частинам другу складову в (10.4)

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}dt=\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\right]\delta x dt.$$

Перша складова в отриманому виразі дорівнює нулю, так як $\delta[x(t_0)]=\delta[x(t_1)]=0$ за умовами задачі. З урахуванням цього вираз варіації функціонала прийме вигляд:

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial x}\delta x dt-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\right]\delta x dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial x}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\right]\delta x dt. \quad (5.5)$$

Інтеграл (5.5) дорівнює нулю тоді, коли дорівнює нулю підінтегральна функція

$$\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial x}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F(x,\dot{x},t)}{\partial\dot{x}}\equiv 0. \quad (10.6)$$

Вираз (5.6) є рівнянням Ейлера. Екстремалі функціоналів виду (5.1) слід шукати серед рішень цього рівняння.

При дослідженні на екстремум функціоналів виду

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,\dot{x},...,x^{(n)})dt, \quad (5.7)$$

що залежать від похідних вищих порядків, слід користатися рівнянням Ейлера-Пуассона, яке наводимо без виводу

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}+\frac{d^2}{dt^2}F_{\ddot{x}}+...+(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}F_{x^{(n)}}=0, \quad (5.8)$$

$F_x, F_{\dot{x}}, F_{\ddot{x}},..., F_{x^{(n)}}$ – частинні похідні інтегранта функціонала (10.7) за похідними змінної x від 0 до n-го порядку.

Рівняння (5.6) і (5.8) складають основу методів класичного варіаційного числення, які передбачають безперервність і лінійність варіацій функціоналів,

досліджуваних функцій і їх похідних. Така постановка варіаційної задачі знаходить обмежене застосування в теорії автоматичного керування, оскільки в більшості випадків керуючий вплив належить замкнутій множині, тобто обмежений по модулю.

Крім того, для реальних об'єктів керування підлягають обмеженню деякі фазові координати. Досить часто екстремальне значення прийнятого критерію оптимальності досягається на розривних керуваннях. Точки розриву можуть мати і похідні оптимальних траєкторій. Положення і число точок розриву при цьому заздалегідь невідомі.

Ці обставини викликали необхідність розробки сучасних методів варіаційного числення, позбавлених зазначених недоліків.

5.2 Принцип максимуму

До числа таких методів відноситься принцип максимуму Л. С. Понтрягіна, доказ якого базується на теорії множин і функціональному аналізі, які не вивчаються в курсах математики внз. Тому наведемо тут спрощений доказ, приділивши основну увагу фізичному сенсу принципу не на шкоду строгості доказу.

Розглянемо об'єкт керування, збурений рух якого задано рівняннями

$$\frac{d\eta_i}{dt} = f_i(\eta_1 ..., \eta_n, U_1, ..., U_r), \ (i = 1, ..., n), \tag{5.9}$$

а мета керування - мінімізація функціоналу

$$I = \int_0^\infty f_0(\eta_1 ..., \eta_n, U_1, ..., U_r) dt. \tag{5.10}$$

Введемо нову координату

$$\eta_0 = \int_0^\infty f_0(\eta_1 ..., \eta_n, U_1, ..., U_r) dt. \tag{5.11}$$

Тоді

$$\frac{d\eta_0}{dt} = f_0(\eta_1 ..., \eta_n, U_1, ..., U_r). \tag{5.12}$$

Приєднаємо рівняння (5.12) до системи (5.9) і розглянемо рух об'єкта керування в розширеному фазовому просторі розмірності n+1

$$\frac{d\eta_j}{dt} = f_j(\eta_0, \eta_1 ..., \eta_n, U_1, ..., U_r), \ (j = 0, 1, ..., n). \tag{5.13}$$

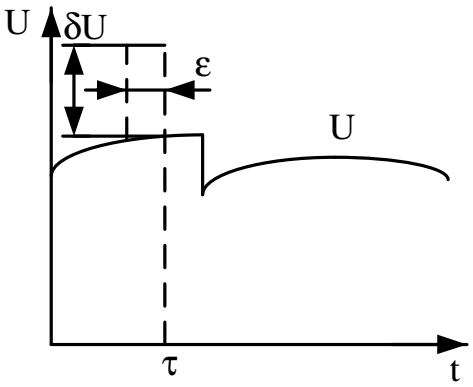


Рис. 5.2 – Накладання голчастої варіації

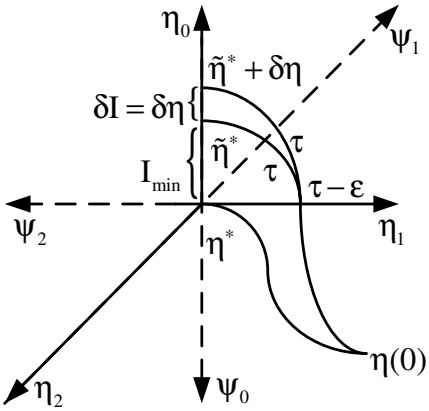


Рис. 5.3 – Варіація оптимальної траєкторії

Запишемо систему (5.13) у векторній формі

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt} = f(\tilde{\eta}, U). \qquad (5.14)$$

де $\tilde{\eta}$ – вектор в (n+1)-мірному просторі на відміну від вектора η в n-мірному.

Будемо вважати, що функції f безперервні і мають похідні за всіма змінними.

Задачу керування сформулюємо наступним чином. Серед кусково-безперервних функцій, що задовольняють умові

$$U \le 1, \qquad (5.15)$$

необхідно знайти оптимальне керування U*, що забезпечує мінімум функціоналу (5.10) на траєкторіях руху η* системи (5.12) з будь-якого початкового положення η(0) в початок координат η= 0.

Припустимо, що функції η* і U* відомі. Розглянемо зміну оптимального керування в часі (рис. 5.9). Проваріюємо U* на нескінченно малому інтервалі ε, наклавши на нього голчасту варіацію δU. Величина варіації повинна бути такою, щоб проварійоване керування $U = U^* + \delta U$ задовольняло умові (5.15), тобто не перевищувало заданих обмежень. Оскільки тривалість ε голчастої варіації нескінченно мала, навіть великі значення δU надають нескінченно малий вплив на подальший рух об'єкта керування.

Голчаста варіація, яка значно відрізняється від гладкої варіації, застосовуваної в класичному варіаційному численні, дозволяє розширити клас допустимих функцій і є вихідним положенням принципу максимуму. Оскільки до моменту часу $t = \tau - \varepsilon$ до об'єкта прикладалося оптимальне керування, він рухався по оптимальній траєкторії $\tilde{\eta}^*$. В результаті варіювання керування на інтервалі $\tau - \varepsilon < t < \tau$ подальший рух $\tilde{\eta}$ при $t > \tau$ відрізняється від оптимального $\tilde{\eta}^*$ на величину варіації траєкторії $\delta\tilde{\eta} = \tilde{\eta} - \tilde{\eta}^*$. Величину $\delta\tilde{\eta}$ в момент часу $t = \tau$ можна визначити як добуток різниці швидкостей зміни $\tilde{\eta}$ і $\tilde{\eta}^*$ на тривалість ε голчастої варіації

$$\delta\tilde{\eta} = \varepsilon\left(\left(\frac{d\tilde{\eta}}{dt}\right)_{t=\tau} - \left(\frac{d\tilde{\eta}^*}{dt}\right)_{t=\tau}\right) = \varepsilon\left(f(\tilde{\eta}, U) - f(\tilde{\eta}, U^*)\right). \qquad (5.16)$$

Варіація $\delta\tilde{\eta}$ траєкторії нескінченно мала, тому закон її зміни можна визначити, вирішивши рівняння руху в варіаціях. Рівняння в варіаціях виходять з основних рівнянь (5.13) після заміни змінних η_j на $\eta_j + \delta\eta_j$ (j=0,l, ... ,n) і розкладання в ряд Тейлора по $\delta\eta_i$:

$$\frac{d(\eta_j + \delta\eta_j)}{dt} = f_j(\eta_0 + \delta\eta_0, \eta_1 + \delta\eta_1, ..., \eta_n + \delta\eta_n, u_1, ..., u_r) =$$

$$f_j(\eta_0, \eta_1, ..., \eta_n, U_1, ..., U_r) + \sum_{i=0}^{n} \delta\eta_i \frac{\partial f_j(\eta_0, \eta_1, ..., \eta_n, U_1, ..., U_r)}{\partial \eta_i} + R_n \qquad (j = 0,l, ... ,n).$$

Відкинувши доданок R_n порядку малості більше двох і ураховуючи (5.13), отримаємо рівняння в варіаціях

$$\frac{d(\delta\eta_j)}{dt} = \sum_{i=0}^{n} \delta\eta_i \frac{\partial f_j(\tilde{\eta}, U)}{\partial \eta_i}, \ (j = 0,l, ... ,n). \qquad (5.17)$$

Серед всіх розв'язків рівнянь (5.17) найбільший інтерес представляє значення координати $\delta\eta_0$ в будь-який момент часу t, $(\tau \le t \le \infty)$. Такий інтерес цілком зрозумілий, тому що $\delta\eta_0$ згідно з (5.11), є варіацією функціонала δI, що виникла в результаті накладення на оптимальне керування голчастої варіації. Оскільки лише оптимальне керування U* забезпечує мінімальне значення функціоналу (5.10), будь-яке інше керування призведе до збільшення I. Отже,

$$\delta I = \delta\eta_0 \ge 0. \qquad (5.18)$$

Введемо вектор $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n)$ такий, щоб скалярний добуток $\delta\tilde{\eta}$ та $\tilde{\psi}$ дорівнював рівно $-\delta\eta_0$, тобто

$$\langle \delta\tilde{\eta}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = -\delta\eta_0 \le 0. \qquad (5.19)$$

Як відомо, скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні. Тому для виконання співвідношення (5.19) досить, щоб проекції векторів $\delta\eta_i$ і ψ_i (i = 1, ..., n) були взаємно перпендикулярні, а проекції $\delta\eta_0$ і ψ_0 були зустрічно паралельні.

Скалярний добуток (5.19) при будь-яких неоптимальних керуваннях буде негативним. Лише при оптимальному керуванні U* він дорівнює нулю, досягаючи свого максимуму. У цьому полягає основна ідея принципу максимуму.

Голчаста варіація керування припинилася при $t = \tau$. До цього моменту варіація функціонала, викликана варіацією керування досягла свого максимального значення і в подальшому залишається незмінною для будь-якого часу t, $(\tau \le t \le \infty)$. Отже,

$$\langle \delta\tilde{\eta}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = \text{const}; \ (\tau \le t \le \infty),$$

звідки слід

$$\frac{d}{dt}\langle \delta\tilde{\eta}(t), \tilde{\psi}(t) \rangle = 0; \ (\tau \le t \le \infty),$$

або

$$\left\langle \frac{d(\delta\tilde{\eta}(t))}{dt}, \tilde{\psi}(t) \right\rangle + \left\langle \delta\tilde{\eta}(t), \frac{d(\tilde{\psi}(t))}{dt} \right\rangle = 0, \ (\tau \le t \le \infty). \qquad (5.20)$$

Представимо рівність (5.20) в розгорнутому вигляді

$$\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{d(\delta\eta_j(t))}{dt} + \sum_{i=0}^{n} \delta\eta_j(t) \frac{d(\psi_i(t))}{dt} = 0$$

і підставимо в нього значення похідних з виразу (11.9)

$$\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \sum_{i=0}^{n} \delta\eta_j(t) \frac{\partial f_j(\tilde{\eta}, U)}{\partial \eta_i} + \sum_{i=0}^{n} \delta\eta_i(t) \frac{d(\psi_i(t))}{dt} = 0. \qquad (5.21)$$

Змінивши порядок підсумовування по i та j в першому доданку виразу (5.21), отримаємо

$$\sum_{i=0}^{n} \delta\eta_i(t) \left(\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f_j(\tilde{\eta} U)}{\partial \eta_i} + \frac{d(\psi_i(t))}{dt} \right) = 0,$$

звідки слідує

$$\frac{d(\psi_i(t))}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial f_j(\tilde{\eta}, U)}{\partial \eta_i}, \ \ (i = 0,1, \ldots, n). \qquad (11.14)$$

Лінійні диференціальні рівняння (5.22) є сполученими основній системі (5.17).

Розглянемо нерівність (5.22) після підстановки в неї значення $\delta\tilde{\eta}$ з (5.16) і скорочення на ε:

$$\left\langle f(\tilde{\eta}, U), \tilde{\psi} \right\rangle - \left\langle f(\tilde{\eta}, U^*), \tilde{\psi} \right\rangle \le 0, \qquad (5.22)$$

а також функцію Гамільтона

$$H = \left\langle f(\tilde{\eta}, U), \tilde{\psi} \right\rangle.$$

З виразу (5.23) випливає, що оптимальне керування повинно доставляти максимальне значення функції H. В цьому полягає принцип максимуму, основні положення якого досить наочно представляються графічно для системи другого порядку (рис. 5.10). У площині двох координат (η_1, η_2) траєкторія руху системи під дією оптимального керування починається в точці початкових збурень η(0) і закінчується на початку координат. У просторі трьох координат (η_1, η_2, η_0) оптимальна траєкторія $\tilde{\eta}^*$ відсікає на вісі η_0 відрізок, рівний мінімальному значенню I_{min} прийнятого критерію якості. На відрізку часу $\tau - \varepsilon \le t \le \tau$ відбувається варіація $\delta\tilde{\eta}$ траєкторії руху $\tilde{\eta}^*$, викликана накладанням на оптимальне керування голчастої варіації (рис. 5.2). Подальший рух системи здійснюється по траєкторії $\tilde{\eta}^* + \delta\tilde{\eta}$, яка відсікає на осі η_0 після закінчення перехідного процесу відрізок $I_{min} + \delta I$. З розташування вісей координат сполученої системи (ψ_1, ψ_2, ψ_0) витікає, що скалярний добуток векторів $\delta\tilde{\eta}$ і $\tilde{\psi}$ при $|\psi_0| = 1$ визначається співвідношенням

$$\left\langle \delta\tilde{\eta}, \tilde{\psi} \right\rangle = \left\langle \delta\tilde{\eta}_0, \tilde{\psi}_0 \right\rangle + \left\langle \delta\tilde{\eta}_1, \tilde{\psi}_1 \right\rangle + \left\langle \delta\tilde{\eta}_2, \tilde{\psi}_2 \right\rangle = -\delta\tilde{\eta}_0 \le 0. \qquad (5.24)$$

Отже, оптимальне керування звертає нерівність (5.24) в тотожність, тобто доставляє максимальне значення добутку $\left\langle \delta\tilde{\eta}, \tilde{\psi} \right\rangle$, і може бути визначено з умови максимуму функції Гамільтона

$$\max_{U} H(\tilde{\eta}, \tilde{\psi}, U) = 0. \quad (5.25)$$

У багатьох випадках не представляється можливим знайти з умови (5.25) явний вид оптимального керування. Тоді рівняння (5.9), (5.12), сполучена система (5.22) і умови максимуму (5.25) утворюють крайову задачу принципу максимуму. Ця задача має ряд специфічних особливостей, що ускладнюють застосування стандартних чисельних методів розв'язання крайових задач. До числа таких особливостей відносяться розриви функцій $U_1,...,U_r$, що задовольняють умові максимуму (5.25), їх неоднозначість, нелінійний характер залежності $U = U(\eta, \psi)$ при дотриманні умови (5.15) навіть в лінійних системах. Крім того, особливістю розв’язання оптимізаційних задач, пов'язаних з принципом максимуму навіть у випадках, коли вдається знайти явний вигляд оптимальних керувань, є їх погана збіжність, викликана нестійкістю спільного розв’язання систем (5.9) і (5.22).

5.3 Динамічне програмування

Вельми загальний метод розв’язання задач оптимального керування, що отримав назву динамічного програмування, запропонований Р.Беллманом. Розглянемо основні положення цього методу. Почнемо з розв’язання задачі про оптимальний за швидкодією перехід об'єкта кеування (5.9) з фазового стану η_0 в початок координат η=0. Припустимо, що траєкторія такого переходу існує для будь-яких початкових збурень і рух по ній відбувається за мінімальний час під дією допустимих керувань U.

Час, протягом якого здійснюється рух по оптимальній траєкторії, позначимо через T. Для простоти розглянемо рух об'єкта керування другого порядку з довільної початкової точки $\eta(0)$ в початок координат. Припустимо, що протягом деякого часу t_1–t_0 об'єкт керування рухався з точки (0) в точку η_1 під дією довільного постійного керування $U=U_0$ по неоптимальній траєкторії 1 (рис. 5.4). Починаючи з точки η_1 об'єкт переведений на оптимальну траєкторію 2. Час T руху оптимальною траєкторією залежить від положення початкової точки η_1 переходу з траєкторії 1 на траєкторію 2, тобто є функцією фазових координат системи

$$T = S(\eta(t)). \quad (5.26)$$

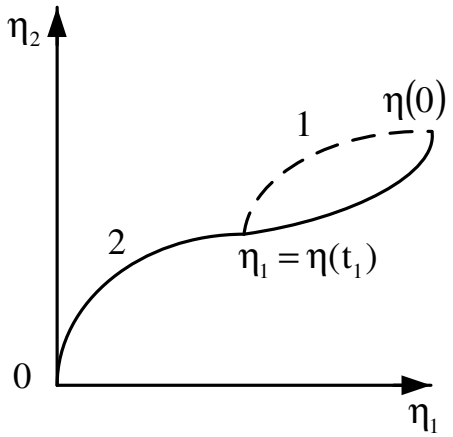


Рисунок5.4 – Фазова траєкторія

Функція (5.26) неперервна і всюди, крім початку координат, має безперервні частинні похідні за координатами розглянутого фазового простору. Рухаючись по оптимальній траєкторії, об'єкт витратить на переміщення з точки η_1 в початок координат певний час. В результаті перехід з точки η (0) в початок координат по траєкторіях 1 і 2 здійсниться за час $T_1 = S(\eta(t_1))$. Якби рух з точки η(0) відразу здійснювався по оптимальній траєкторії 2, то об'єкт керуванання був би переведений в початок координат за мінімальний час: $T = S(\eta(t_0))$.

Відповідно,

$$S(\eta(t_0)) \le (t_1 - t_0) + S(\eta(t_1)). \qquad (5.27)$$

Розділивши обидві частини нерівності (5.27) на позитивну тривалість інтервалу t_1–t_0, отримаємо

$$-\frac{S(\eta(t_1)) - S(\eta(t_0))}{t_1 - t_0} \le 1.$$

Перейдемо до границі при $t_1 \to t_0$:

$$\lim_{t_1 \to t_0}\left[-\frac{d}{dt}S(\eta(t))\right] \le 1. \qquad (5.28)$$

Похідна (5.28) обчислюєтьс за формулою повної похідної в силу системи (5.9)

$$-\frac{d}{dt}S(\eta(t)) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\eta(t))}{\partial \eta_i}\dot{\eta}_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\eta(t))}{\partial \eta_i}f_i(\eta, U). \qquad (5.29)$$

Тоді

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\eta(t))}{\partial \eta_i}f_i(\eta, U) \le 1. \qquad (2.30)$$

Очевидно, що нерівність (5.30) перетворюється в тотожність лише при оптимальному за швидкодією керуванні. Іншими словами, оптимальне керування доставляє максимум похідній (5.29), яка фізично являє собою швидкість убування часу перехідного процесу, тобто

$$\max_U\left[-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i}f_i(\eta, U)\right] = 1,$$

або

$$\min_U\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i}f_i(\eta, U) + 1\right] = 0. \qquad (5.31)$$

Розглянемо тепер загальну задачу керування, оптимального в сенсі мінімуму інтегрального функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\eta, U)dt. \qquad (5.32)$$

Задача оптимального керування об’єктом (5.9) формулюється наступним чином. Потрібно з усіх допустимих керувань, що переводять точку, що зображує, з положення η(0) в початок координат, вибрати таке, яке надає функціоналу (5.32) найменше значення.

Слід зазначити, що якщо $f_0(\eta, U) = 1$, функціонал (5.32) набуде вигляду $I = \int_0^T dt$. Отже, завдання оптимальної швидкодії є окремим випадком розглянутої загальної задачі.

Припустимо, що $f_0(\eta, U) > 0$. Ця умова виконується для всіх інтегральних квадратичних функціоналів.

Введемо на кожній траєкторії новий час τ, пов'язаний з часом перехідного процесу диференціальної залежністю

$$d\tau = f_0(\eta, U)dt.$$

В новому часі функціонал (5.32) перетворюється до вигляду

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \tau_1 - \tau_0,$$

а поставлена задача зводиться до розглянутої раніше задачі оптимальної швидкодії.

Нехай U - керування, що переводить точку, що зображує, з положення $\eta(0)$ в положення η_1, а $\eta(t)$ - відповідна траєкторія. Припустимо

$$\tau(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\eta, U)dt. \tag{5.33}$$

Функція τ (t) є безперервною і монотонно зростаючою, тому що $f_0 > 0$, отже існує зворотна до неї функція t (τ). З (5.33) отримаємо

$$\frac{d\tau}{dt} = f_0(\eta, U).$$

Тоді

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{f_0(\eta(\tau), U(\tau))}.$$

Отже, в новій часовій області об'єкт керування (5.9) описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{\eta}_i = \frac{d\eta_i(\tau)}{d\tau} = \frac{d\eta_i(\tau)}{dt} \cdot \frac{dt(\tau)}{d\tau} = \frac{f_i(\eta(\tau), U(\tau))}{f_0(\eta(\tau), U(\tau))}. \tag{5.34}$$

Підставивши (5.35) в (5.29) і далі в (5.31), отримаємо

$$\min_U \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{f_i(\eta, U)}{f_0(\eta, U)} + 1 \right] = 0,$$

або

$$\min_U \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i} f_i(\eta, U) + f_0(\eta, U) \right] = 0. \tag{5.35}$$

Для визначення оптимального керування U*, що доставляє мінімум (5.35), необхідно знайти похідну

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{\partial f_i(\eta, U)}{\partial U} + \frac{\partial f_0(\eta, U)}{\partial U} = 0 \tag{5.36}$$

і розв’язати спільно (5.35) і (5.36).

Вираз (5.36) називається основним функціональним рівнянням Беллмана, а S(η) - функцією Беллмана.

5.4 Прямий метод Ляпунова

Одним з найбільш ефективних методів дослідження стійкості руху є прямий метод Ляпунова, який часто називають другим методом Ляпунова. Для розкриття суті цього методу розглянемо деякі дійсні функції $V(\eta) = V(\eta_1,...,\eta_n)$, визначені в області

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \le \mu, \tag{5.37}$$

де μ – постійне позитивне число.

Передбачається, що в області (5.37) ці функції однозначні, безперервні і звертаються в нуль, коли всі $\eta_1,...,\eta_n$ рівні нулю, тобто

$$V(0) = 0. \tag{5.38}$$

Якщо в околицях початку координат функція V крім нуля може приймати значення тільки одного знака, то вона називається знакопостійно (відповідно позитивною або негативною). Якщо ж знакопостійна функція звертається в нуль тільки на початку координат, то функція V називається знаковизначеною (відповідно позитивно-визначеною або негативно-визначеною). Такі функції V використовуються для дослідження стійкості руху і називаються функціями Ляпунова.

Знаковизначена функція при $\eta_1 = ... = \eta_n = 0$ має екстремум (мінімум для позитивно-визначеної функції і максимум для негативно-визначеної функції). Знакопостійні функції на початку координат екстремуму не мають.

Припустимо, що позитивно-визначена функція V=V (η) неперервна разом з похідними першого порядку. Тоді при $\eta_1 = ... = \eta_n = 0$ вона матиме ізольований екстремум, а всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right)_0 = 0, \quad (i = 1,..., n). \tag{5.39}$$

Розкладемо функцію V(η)в ряд Маклорена за ступенями $\eta_1,...,\eta_n$

$$V = V(0) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_k}\right)_0 \eta_i \eta_k + R_n,$$

де R_n – члени розладання вищого порядка. Ураховуючи співвідношення (5.38) і (5.39), отримаємо

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}\eta_i\eta_k + R_n. \tag{5.40}$$

Тут постійні числа $v_{ik} = v_{ki}$ визначаються виразом

$$v_{ik} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta_i \partial \eta_k}\right)_0.$$

З виразу (5.40) видно, що розкладання позитивно-визначеної функції V в ряд Маклорена за ступенями $\eta_1,...,\eta_n$ не містить членів першого ступеня.

Таким чином, незалежно від членів вищого порядку при досить малих по модулю значеннях η_i функція V буде позитивно-визначеною, якщо позитивно-визначеною є квадратична форма

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}\eta_i\eta_k \ . \qquad (5.41)$$

Саме тому в теорії керування пошук функцій Ляпунова найчастіше здійснюється в класі квадратичних функцій виду (5.41).

Для визначення позитивної визначеності квадратичних форм (5.41) використовують критерій Сильвестра, згідно.жєю з яким квадратична форма є позитивно-визначеною, якщо всі головні діагональні мінори матриці її коефіцієнтів v_{ik} позитивні.

В основу прямого методу Ляпунова покладені дві теореми.

1. Теорема Ляпунова про стійкість руху. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти позитивно-визначену функцію V, повна похідна за часом якої в силу цих рівнянь була б негативною знакопостійною функцією, то незбурений рух стійкий.

2. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти позитивно-визначену функцію V, повна похідна за часом якої в силу цих рівнянь була б негативно-визначеною функцією, то незбурений рух асимптотично стійкий.

Фізично функцію Ляпунова можна ототожнювати з надлишковою енергією, запасеною системою на траєкторіях збуреного руху, в порівнянні з запасом енергії на траєкторіях незбуреногоу. Якщо надлишкова енергія системи постійно зменшується, про що свідчить негативність похідної функції Ляпунова, то зменшуються сили, що викликають відхилення істинного руху від незбуреного. При цьому досліджувана система повертається на траєкторії незбуреного руху незалежно від того, чим були викликані початкові відхилення.

Покажемо тепер умови відповідності основного функціонального рівняння Беллмана прямому методу Ляпунова.

Розглянемо рівняння (5.9) і функціонал (5.10). Будемо вважати, що існує позитивно-визначена функція Ляпунова $V(\eta)$, а інтегрант функціоналу (5.10) $f_0(\eta, U)$ позитивна знакопостійна або позитивно-визначена функція. Тоді відповідно до наведених теоремам Ляпунова замкнута система керування, оптимальна в сенсі мінімуму функціоналу (5.10), буде стійка, якщо виконуються умови

$$\frac{dV(\eta)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta_i} f_i(\eta, U) = -f_0(\eta, U)$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta_i} f_i(\eta, U) + f_0(\eta, U) = 0. \qquad (5.42)$$

Таким чином, якщо в якості інтегранта критерію оптимальності прийнята позитивно-визначена або ненегативна функція, в процесі вирішення варіаційних задач функція Беллмана однозначно може бути замінена функцією Ляпунова. Це випливає з зіставлення виразів (5.36) і (5.42).

Контрольні запитання

1.Перший клас задач оптимального керування.

2.Другий клас задач оптимального керування.

3.Послідовне розв’язання задач оптимального керування першого та другого класу.

4.Що є задачею варіаційного числення?

5.Інтегральні функціонали якості.

6.Основне функціональне рівняння Беллмана.

7.Фізичний сенс функції Ляпунова.

8.Теорема Ляпунова про стійкість.

9.Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість.

Тема 6. ЗАДАЧА АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯРЕГУЛЯТОРІВ (АКР) І ОСОБЛИВОСТІ ЇЇ РОЗВ’ЯЗАННЯ СУЧАСНИМИ МЕТОДАМИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

6.1 Аналітичне конструювання регуляторів (АКР)

Аналітичне розв’язання задачі про оптимальну стабілізацію лінійних стаціонарних об'єктів при квадратичному функціоналі якості було запропоновано А. М. Лєтовим, яким були вказані шляхи подолання труднощів рішення крайових задач. Цей напрямок одержав назву аналітичного конструювання регуляторів. Завдяки ясною постановці завдання і конструктивним результатами даний метод став поширеним інструментом синтезу оптимальних керувань для різних класів об'єктів. Одночасно з О.М.Лєтовим дослідження в цьому напрямку проводилися Р. Калманом і в зарубіжних джерелах отримали назву лінійно-квадратичної оптимізації. Тому завдання АКР ще називається задачею Лєтова-Калмана. Кожен зі згаданих підходів має свої особливості, проте обидва рішення призводять до аналогічних результатів, що свідчить про коректну постановку задачі синтезу.

Розглянемо процедуру аналітичного конструювання регуляторів для випадку лінійних стаціонарних об'єктів в постановці А.М.Лєтова.

Нехай збурений рух узагальненого об'єкта n-го порядку описується системою лінійних або лінеаризованих диференціальних рівнянь збуреного руху в формі Коші

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + m_i U, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{6.1}$$

де b_{ik}, m_i – постійні коефіцієнти.

Серед множини кусочно-гладких функцій, що підлеглі обмженню

$$|U| \le 1, \tag{6.2}$$

необхідно знайти оптимальне керування $U(\eta_k)$, яке здійснює переведення системи (6.1) з початкового положення $(\eta_1(0),...,\eta_n(0))$ в початок координат $(\eta_1(\infty)=0,...,\eta_n(\infty)=0)$ таким чином, щоб функціонал якості

$$I = \int_0^\infty F(\eta, U)dt = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n w_i \eta_i^2 + cU^2 \right) dt \tag{6.3}$$

приймав найменше значення.

Спочатку ця задача була зведена до задачі Лагранжа на умовний екстремум. З цією метою система (6.1) представляється у вигляді

$$\varphi_i(\eta, U, t) = p\eta_i - \sum_{k=1}^n b_{ik}\eta_k - m_i U, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{6.4}$$

і вводиться в розгляд функціонал

$$I^* = \int_0^\infty \left(F(\eta, U) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\varphi_i(\eta, U, t) \right) dt = \int_0^\infty L(\eta, U, \lambda, t)dt, \tag{6.5}$$

де $\lambda_i(t)$ – невизначені множники Лагранжа.

Потім шляхом розв'язання рівнянь Ейлера визначаються екстремалі $\eta_i(t)$, $\lambda_i(t)$ функціоналу (6.5). Рівняння Ейлера для функції $L(\eta,U,\lambda,t)$ мають вигляд

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i} - p\frac{\partial L}{\partial (p\eta_i)} = 0, \qquad (i = 1,..., n); \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} - p\frac{\partial L}{\partial (pU)} = 0. \tag{6.7}$$

З рівняння (6.7) визначається оптимальне курування як функція невизначених множників Лагранжа

$$U(t) = \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^n m_k \lambda_k(t). \tag{6.8}$$

В результаті підстановки (6.8) в (6.4) розглядається система 2n рівнянь з 2n невідомими $\eta_i(t)$, $\lambda_i(t)$

$$p\eta_i = \sum_{ik}^n b_{ik}\eta_k + \frac{1}{2c}\sum_{k=1}^n m_i m_k \lambda_k(t);$$

$$p\lambda_i = 2w_i\eta_i^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k b_{ik}, \qquad (i = 1,...,n). \tag{6.9}$$

Для розв’язання цієї системи диференціальних рівнянь необхідно визначити 2n коренів характеристичного рівняння системи (6.9)

$$D(\mu)=\begin{vmatrix} b_{11}-\mu & \dots & b_{1n} & \frac{m_1^2}{2c} & \dots & \frac{m_1 m_n}{2c} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn}-\mu & \frac{m_n m_1}{2c} & \dots & \frac{m_n^2}{2c} \\ -2w_1 & \dots & 0 & -b_{11}-\mu. & \dots & -b_{n1} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots & -2w_n & -b_{1n} & \dots & -b_{nn}-\mu \end{vmatrix}=0, \quad (6.10)$$

яке має ту властивістю, що якщо μ - будь-який його корінь, то коренем буде число - μ. Для забезпечення стійкості замкнутої системи (6.1) з керуванням (6.8) використовуються n коренів з негативною дійсною частиною, а іншими n коренями, що знаходяться в правій півплощині, нехтують.

Після цього загальне розв'язання системи (6.9) визначається у вигляді суми експоненціальних функцій

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}\Delta_i(\mu_k)C_k e^{\mu_k t}, \quad (i=1,\dots,n), \quad (6.11)$$

$$\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n+i}(\mu_k)C_k e^{\mu_k t},$$

де Δ_i, Δ_{n+i} – мінори i-го або (n+i)-го елемента першої строки визначника (6.10), C_k – довільні постійні.

Для визначення алгоритму оптимального керування в функції фазових координат системи (6.1) необхідно представити невизначені множники Лагранжа λ_i через змінні η_i. Це здійснюється шляхом виключення з системи (6.11) експоненціальних функцій $C_k e^{\mu_k t}$. В результаті оптимальне керування набуває вигляду

$$U=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\,. \quad (6.12)$$

Керування (6.12) знайдено без врахування обмежень (6.2). У замкнутої області, підпорядкованій умові (6.2), шукане оптимальне керування визначається виразом

$$U=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i>1; \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i & \text{при} \quad \left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right|\le 1; \\ -1 & \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i<-1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Вираз (6.13) має більш компактну форму запису

$$U=\mathrm{sat}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\eta_i\right), \quad (6.14)$$

де sat(*) – це функція, що дорівнює аргументу, коли він за модулем менше одиниць, іє знаковою функцією в протилежному випадку.

Розв’язання задачі АКР можна здійснити з використанням принципу максимуму, для чого система (6.1) повинна бути перетворена до виду

$$f_i = p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + m_i U, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{6.15}$$

і введена додаткова координата η_0, що задовольняє співвідношенню

$$f_0 = p\eta_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i \eta_i^2 + cU^2 .$$

Після цього складена сполучена система

$$p\varphi_i = -\sum_{j=0}^{n} \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial \eta_i}, \qquad (i = 0,...,n) \tag{6.16}$$

і визначена функція Гамільтона

$$H = \sum_{i=0}^{n} f_i \psi_i . \tag{6.17}$$

Оптимальне керування, що мінімізує функціонал (6.3), доставляє максимум функції (6.17) і визначається з умови

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0,$$

звідки з урахуванням того, що $\psi_0 = -1$,

$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2c} \psi_k . \tag{6.18}$$

Таким чином, оптимальне керування залежить від невідомих поки функцій $\psi_к$ і може бути виражено через фазові координати об'єкта керування, якщо визначити залежність $\psi_k(\eta_i)$. Для цього необхідно до системи (6.15) з урахуванням (6.18) приєднати систему (6.16)

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + \sum_{k=-1}^{n} \frac{m_i m_k}{2c} \psi_k, \qquad i = 1,...,n,$$

$$p\psi_i = -\sum_{j=0}^{n} \varphi_j \frac{\partial f_j}{\partial \eta_i}, \qquad (i = 0,...,n). \tag{6.19}$$

Система рівнянь (6.19) ідентична системі (6.9) і подальший хід розв’язання нічим не відрізняється від розглянутого вище. В результаті визначається алгоритм оптимального керування (6.14).

Розглянемо процедуру аналітичного конструювання регуляторів в постановці Р.Калмана, який використав метод дінамічного програмування.

Оптимальне керування, що належить до класу кусково-безперервних функцій, підпорядкованих обмеженню (6.2), і доставляє мінімум функціоналу

$$I = \int_0^{\infty} F(\eta, U)dt = \int_0^{\infty} \left(\eta^T W \eta + cU^2\right)dt \tag{6.20}$$

на траєкторіях рухусистемы (14.1), повинно задовольнятирозв’язанню основного функціонального рівняння Беллмана в частинних похідних

$$\min_U \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \frac{d\eta_i}{dt} + F \right] = 0, \tag{6.21}$$

де S – функція Беллмана, якапри синтезі оптимальних керуваньза мінімумом функціонала якості (6.20) однозначно може бути замінена функцією Ляпунова, тому щорівняння (6.21) задовольняє умовам теореми Ляпунова про стійкість.

Функція Ляпунова V(η) для системи лінійних диференціальних рівнянь (6.1) являє собою позитивно-визначену квадратичну форму

$$V(\eta) = \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}\eta_i\eta_k, \qquad v_{ik} = v_{ki}, \tag{6.22}$$

або в матричному вигляді

$$V(\eta) = \eta^T V \eta,$$

коефіцієнти якої відповідають критеріям Сильвестра.

Продиференціював основне функціональне рівняння Беллмана (6.21) по U, визначимо оптимальне керування, що доставляє мінімум функціоналу (6.20) на траєкторіях руху системи (6.1):

$$U = -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2c}\frac{\partial V}{\partial \eta_i}. \tag{6.23}$$

Матриця V є стаціонарним розв’язанням диференціального рівняння Ріккаті

$$V(t) = V(t)B + B^T V(t) - c^{-1}V(t)mm^T V(t) + W, \quad V(0) = 0. \tag{6.24}$$

З усіх розв’язань рівнянь (6.24) слід вибрати такі, які відповідають критеріям Сильвестра, тому що тільки в цьому випадку забезпечується виконання теореми О.М.Ляпунова про асимптотичну стійкість. Пошук оптимального керування пов'язаний з необхідністю інтегрування матричного рівняння (6.24), уникнути якого можливо, якщо взяти матрицю V стаціонарною. В цьому випадку коефіцієнти матриці V визначаються в результаті чисельного розв’язання матричного рівняння Ріккаті

$$VB + B^T V - c^{-1}Vmm^T V + W = 0. \tag{6.25}$$

Матричне рівняння (6.25) являє собою систему $\frac{n(n+1)}{2}$ нелінійних алгебраїчних рівнянні щодо такої ж кількості невідомих коефіцієнтів v_{ik} функції Ляпунова (6.22). Якщо в результаті розв’язання (6.25) ця функція знайдена, то оптимальне керування з урахуванням обмеження (6.2) приймає остаточний вигляд

$$U = -\mathrm{sat}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_i}{c} v_{ik}\eta_k\right), \qquad (i = 1,\ldots, n). \tag{6.26}$$

6.2 Особливості розв’язання задачі АКР

Задача аналітичного конструювання регуляторів в постановці Лєтова-Калмана може бути вирішена тільки чисельно і не має строгого аналітичного рішення в загальному вигляді, що ускладнює аналіз загальних властивостей синтезованих систем.

Спрощення обчислювальних процедур при вирішенні задачі АКР запропоновано А.А.Красовськім. Для цього в функціонал (6.20) вводиться

додатковий доданок, з урахуванням якого він приймає в розгорнутій формі вигляд

$$I=\int_0^{\infty}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}\eta_i\eta_j + cU^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta_i}\right]^2\right\}dt. \qquad (6.27)$$

В інтегралі (6.27), який називається критерієм узагальненої роботи, функція V(η) являє собою квадратичну форму (6.22), коефіцієнти якої визначаються в результаті розв'язання матричного алгебраїчного рівняння

$$VB + B^T V + W = 0, \qquad (6.28)$$

де B - матриця коефіцієнтів b_{ik} системи (6.1) розмірності nxn, W - квадратна матриця вагових коефіцієнтів інтегранта (6.27) того ж розміру.

Рівняння (6.28) має єдине розв'язання V>0, зокрема тоді, коли власні числа матриці B мають негативні дійсні частини, тобто лише за умови, що об'єкт керування власне стійкий. В цьому випадку синтезована система буде асимптотично стійка, а функція V(η) є функцією Ляпунова. Тоді алгоритм оптимального керування визначається у вигляді (6.23). При визначенні функції Ляпунова, що задовольняє рівнянню (6.28), зручно користуватися методом, запропонованим Е.А.Барбашіним. Відповідно до цього методу шукана функція Ляпунова має вигляд матричного рівняння

$$V(\eta)=\frac{-1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \eta_1^2 & \dots & 2\eta_1\eta_n & \eta_2^2 & \dots & 2\eta_i\eta_k & \dots & \eta_n^2 \\ -0,5w_{11} & c_{11,11} & \dots & c_{1n,11} & c_{22,11} & \dots & c_{ik,11} & \dots & c_{nn,11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{1n} & c_{11,1n} & \dots & c_{1n,1n} & c_{22,1n} & \dots & c_{ik,1n} & \dots & c_{nn,1n} \\ -0,5w_{22} & c_{11,22} & \dots & c_{1n,22} & c_{22,22} & \dots & c_{ik,22} & \dots & c_{nn,22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -w_{ik} & c_{11,ik} & \dots & c_{1n,ik} & c_{22,ik} & \dots & c_{ik,ik} & \dots & c_{nn,ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -0,5w_{nn} & c_{11,nn} & \dots & c_{1n,nn} & c_{22,nn} & \dots & c_{ik,nn} & \dots & c_{nn,nn} \end{vmatrix} \qquad (6.29)$$

де $c_{ij,kl}$ – виражаються через дійсні коефіцієнти диференціальних рівнянь (6.1) збуреного руху об'єкта керування та підпорядковані співвідношенням:

$$c_{ij,kl} = c_{ji,kl} = c_{ji,lk};$$

$$c_{ij,kl}=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j \neq k \neq l; \\ b_{ik} & \text{при} \quad j = l;\ i \neq k; \\ b_{ii} + b_{kk} & \text{при} \quad i = k;\ j = l;\ i \neq j; \\ b_{ii} & \text{при} \quad i = j = k = l. \end{cases}$$

З рівняння (6.29) коефіцієнти функції Ляпунова v_{ik}визначаютьсяза формулами Крамера

$$v_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

де Δ - мінор, що відноситься до елементу першого рядка і першого стовпця визначника (15.3), Δ_{ik} - алгебраїчні доповнення елементів першого рядка того ж визначника, що містять добутки $\eta_i\eta_k$.

Таке розв'язання дозволяє привести коефіцієнти v_{ik} в явному вигляді через коефіцієнти диференціальних рівнянь збуреного руху (6.1) b_{ik} і вагові коефіцієнти функціонала (6.27) w_{ij}. В результаті цього алгоритм керування виду (6.26) виражається в аналітичній формі через параметри об'єкта керування та функціоналу якості.

Функціонал (6.27) отримав назву критерію узагальненої роботи, оскільки останній доданок функціоналу (6.27) $\int_0^\infty U_{опт}^2 dt$ виражає собою енергію або узагальнену роботу оптимального керування$U_{опт}$.

Всі розглянуті вище розв'язання задачі АКР призводять до лінійних регуляторів з жорсткими зворотними зв'язками за координатами збуреного руху об'єкта керування. Синтезовані таким чином системи керування за своєю природою є статичними і фізично не в змозі забезпечити виконання граничних умов на кінцях фазових траєкторій $\eta(\infty)=0$, тобто не гарантують збіжність інтегральних функціоналів якості при $t \to \infty$. Іншими словами, не забезпечується асимптотична стійкість замкнутих систем навіть при відсутності координатних збурень. Природна наявність зовнішніх збурюючихвпливів погіршує становище, тому що крім статичної помилки зазадавальнимвпливом система набуває статичну помилку за збуренням. Всі спроби врахування зовнішніх збурень при розв'язанні задачі АКР неминуче призводять до комбінованого принципу керування, що тягне за собою значне ускладнення системи керування, але не дає кардинального вирішення проблеми внаслідок практичної неможливості врахування і безпосереднього вимірювання всього спектра діючих на об'єкт збурюючих впливів. Поряд із зазначеними негативними особливостями пильної уваги заслуговує така структурна властивість систем керування, синтезованих в результаті розв'язання задач АКР, як стійкість при необмеженому збільшенні коефіцієнта підсилення регуляторів. Реалізація нескінченно великих коефіцієнтів підсилення в області лінійних структур пов'язана з необхідністю мати джерело енергії необмеженої потужності, що є фізичнонереалізуємим. Однак в наукових роботах Я.З.Ципкіна і М.В.Меерова показано, що нескінченний коефіцієнт підсилення може бути реалізований в релейних системах, що працюють в ковзному режимі. У зв'язку з цим важливим є зауваження А.М.Льотова про те, що вибір достатньо малого вагового коефіцієнта с в функціоналі виду (6.3) при наявності обмеження (6.2) дозволяє як завгодно близько підійти до релейной характеристики регулятора, що реалізує закон оптимального керування. Дійсно, при с=0 закон керування (6.26) набуває вигляду

$$U = -\mathrm{sign}\left[\sum_{k=1}^{n} m_i v_{ki} \eta_k\right], \qquad (i = 1,...,n). \tag{6.30}$$

Вперше задача АКР для релейної системи буларозв'язана методом динамічного програмування виходячи з умови мінімізації функціоналу

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{i,k=1}^{n} w_{ik}\eta_i\eta_k dt \qquad (6.31)$$

на траєкторіях руху системи (6.1). Оптимальне керування отримане у вигляді

$$U = -\mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right), \qquad (6.32)$$

де V - функція Ляпунова (6.21), коефіцієнти якої для системи (6.1) і функціоналу (6.31) запропоновано визначати в результаті розв'язанняосновного функціонального рівняння Беллмана після підстановки в нього керуючого впливу (6.32)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \eta_i} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k - \left|\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right| = -\sum_{i,k=1}^{n} w_{ik}\eta_i\eta_k. \qquad (6.33)$$

Строгерозв'язання нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних (6.33) ускладнюється наявністю в ньому подсигнатурного виразукеруючої дії (6.32), який стоїть під знаком модуля. У відомих літературних джерелах відсутні дані про методику строгогорозв'язання рівняння (6.33), яке може бути здійснено виходячи з умови існування в синтезованійзамкнутій системі стійкого ковзного режиму, однією з умов виникнення якого є рівність нулю середнього значення сигналу на вході релейного регулятора, тобто виконання співвідношення

$$\left|\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial V}{\partial \eta_i}\right| = 0. \qquad (6.34)$$

Зурахуванням (6.34) рівняння (6.35) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \eta_i} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k = -\sum_{i,k=1}^{n} w_{ik}\eta_i\eta_k. \qquad (6.35)$$

Вираз (6.34) являє собою систему $\frac{n(n+1)}{2}$ лінійних алгебраїчних рівнянь і в матричної формі має вигляд (5.28), тобто є окремим випадком матричного рівняння Ріккаті (6.25). Як зазначено вище, розв'язанням (6.25) є функція Ляпунова (6.22).

У теорії оптимального керування традиційно вважають критерії оптимальності апріорно заданими, залишаючи вибір виду оптимизуючого функціоналу та його коефіцієнтів за межами цієї теорії. Отримані в результаті розв'язання задачі АКР керування є оптимальними лише в сенсі мінімуму призначеного функціоналу. При цьому динамічні властивості синтезованої системи можуть не відповідати бажаним. У зв'язку з цим дуже актуальними є питання вибору таких інтегрантівоптимізуючих функціоналів,при яких оптимальні системи мали б цілком певні наперед задані властивості.

Всі перераховані вище особливості розв'язання задач АКР викликали необхідність розробки нової методології структурно-алгоритмічного синтезу систем оптимального керування, стійких при необмеженому збільшенні коефіцієнтів підсилення регуляторів, які гарантують бажані динамічні і статичні показники при низькій чутливості до широкого спектру

дестабілізуючих факторів і усувають суб'єктивізм в призначенні критеріїв оптимальності.

Контрольні питання

1.Що таке аналітичне конструювання регуляторів?

2.Якими методами можна розв’язати задачу аналітичного конструювання?

3.Які переваги принципу максимуму та динамічного програмування перед рівняннями Ейлера при розв’язанні задачі АКР?

Тема 7.ФУНКЦІОНАЛИ ЯКОСТІ ТА АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ МОДИФІКОВАНИМ ПРИНЦИПОМ СИМЕТРІЇ

7.1 Модифікація принципу симетрії та розв’язання задачі АКР

Розв’язання зворотнх задач динаміки здійснюється з припущення, що бажана траєкторія руху відома заздалегідь і задана в тому чи іншому вигляді. Способи призначення таких траєкторій неминуче містять елементи суб'єктивізму і не виключають можливість застосування ітераційних процедур в процесі пошуку оптимальних рішень, що в найкращій мірі задовольняють комплексу суперечливих вимог технічних завдань на проектування систем керування. Становище ускладнюється тим, що наявність природних обмежень на максимальні значення керуючих впливів і деяких змінних стану об'єкта керування вимагає формування траєкторій руху системи, що складаються з відповідних розв’язанням рівнянь динаміки відрізків фазових траєкторій, які відповідають умовам таких обмежень. Це стосується в першу чергу систем керування, при синтезі яких пред'являються високі вимоги не тільки до точності стабілізації усталених рухів, але і до швидкодії в перехідних режимах. У переважній більшості випадків задавальними впливами для систем керування автоматизованими електроприводами є ступінчасті функції і реалізація законів керуваня, які є результатом розв’язання зворотних задач динаміки, неминуче призводить до необхідності побудови формувачів траєкторій незбуреного руху, що не завжди є економічно і технічно виправданим.

У зв'язку з цим досить актуальною є проблема розробки нових ефективних методів структурно-алгоритмічного синтезу систем керування, що в найкращій мірі задовольняють комплексу суперечливих інженерних вимог до якості керування в умовах дії широкого спектра дестабілізуючих факторів. Важливою також є вимога простоти обчислювальних процедур в процесі визначення алгоритмів керування і виконання умов їх технічної реалізації.

Нижче вивчаються задачі конструювання алгоритмів керування рухом об'єктів, динаміка яких описується лінійними або лінеаризованими диференціальнимирівняннями, на основі загальних положень, визначених властивостями симетрії і розв’язаннями задач аналітичного конструювання регуляторів. Використання цих положень дозволило розробити ефективні процедури синтезу законів керування за умови забезпечення граничних динамічних характеристик керованого процесу при наявності обмежень на керуючі впливи з урахуванням вимог до статичних властивостей синтезованих

структур.

Перейшовши до апарату передавальних функцій, цю схему можна представити у вигляді, наведеному на рис. 7.1.

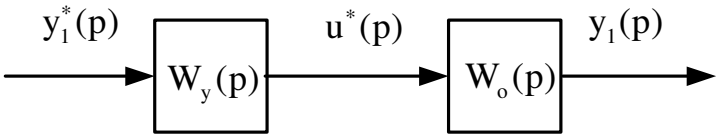


Рисунок7.1 –Розімкнена система, побудована за принципом симетрії

Неважко помітити, що для лінеаризованого об'єкта керування з передавальною функцією загального вигляду $W_0(p)=\frac{M(p)}{N(p)}$, де $M(p)=\sum_{i=0}^{m} b_i p^i$, $N(p)=\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$ - поліноми відповідно ступенів m і n ($m \le n$),b_i таa_i - дійсні числа, передавальна функція керуючої частини

$$W_y(p)=\frac{N(p)}{M(p)}=\frac{1}{W_0(p)}. \qquad (7.1)$$

Іншими словами, передавальна функція керуючої частини системи зворотня передавальній функції керованого об'єкта. В результаті цього еквівалентна передавальна функція розглянутої розімкненої системи дорівнює одиниці, що визначає умову ідеального відтворення заданої траєкторії руху $y_1 = y_1^*$. Така умова виявляється реалізованою лише в тому випадку, коли має місце скорочення нулів і полюсів передавальних функцій об'єкта керуваня $W_0(p)$ і керуючого пристрою $W_к(p)$. Звідси випливає, що відтворення заданих траєкторій руху в розімкнених системах, побудованих на основі принципу симетрії, можливо лише для стаціонарних об'єктів із замороженими параметрами при відсутності зовнішніх збурень. Для реальних електромеханічних об'єктів розглянутий принцип керування в розімкненій системі позбавлений сенсу.

Здійснимозамиканнясистеми, включивши до її складу підсилювальнийелемент з коефіцієнтомпередачі g. В результатіотримаємоструктурнусхему,зображену на рис. 7.2.

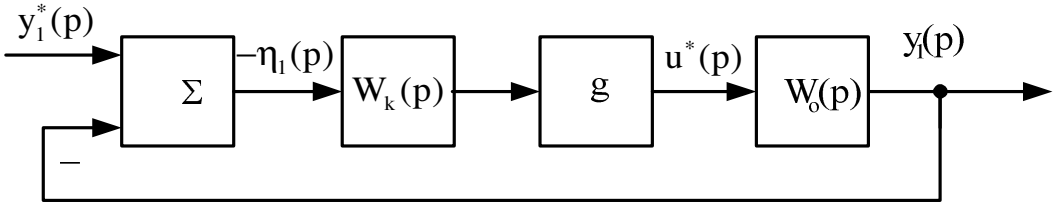


Рисунок7.2 – До побудови замкненої системи

Передавальна функція такої системи

$$\Phi(p)=\frac{y_1(p)}{y_1^*(p)}=\frac{gW_k(p)W_0(p)}{1+gW_k(p)W_0(p)} \qquad (7.2)$$

при дотриманні умови (7.1) приймає вигляд

$$\Phi(p)=\frac{y_1(p)}{y_1^*(p)}=\frac{g}{1+g}. \qquad (7.3)$$

Вираз (7.3) свідчить про те, що використання властивостей симетрії теоретично дозволяє побудувати безінерційну замкнену систему керування, а при $g\to\infty$ забезпечити рівність одиниці передавальної функції такої системи. Отже, керуюча частина системи повинна повністю компенсувати власну динаміку об'єкта керування і забезпечити ідеальне відтворення ступінчастого задавального впливу. У реальних електромеханічних об'єктах це можливо лише при наявності джерела енергії необмеженої потужності, що є фізично нереалізуємим. Крім того, в існуючих системах керування електроприводами завжди має місце обмеження на максимальне значення керуючого впливу. З урахуванням сказаного, модифікуємо замкнену систему, структурна схема якої наведена на рис. 7.2, шляхом введення до її складу інтегруючої ланки, що сприяє формуванню реально досяжних граничних динамічних характеристик в замкнутому стані і забезпечує в разі потреби усунення статичної помилки по задавальному впливу при обмеженому коефіцієнті підилення. Крім того, врахуємо обмеження граничного значення керуючого впливу шляхом включення до відповідного місця прямого каналу підсилення системи функції обмеження sat (saturation). В результаті отримаємо систему, структурна схема якої наведена на рис. 7.3. В такій системі керуючий вплив $u(p)$, що безпосередньо надходить на вхід об'єкта керування, дорівнює оптимальному керуванню $u^*(p)$, якщо $|u^*(p)|\le 1$ та $u(p)=\pm 1$ в іншому випадку.

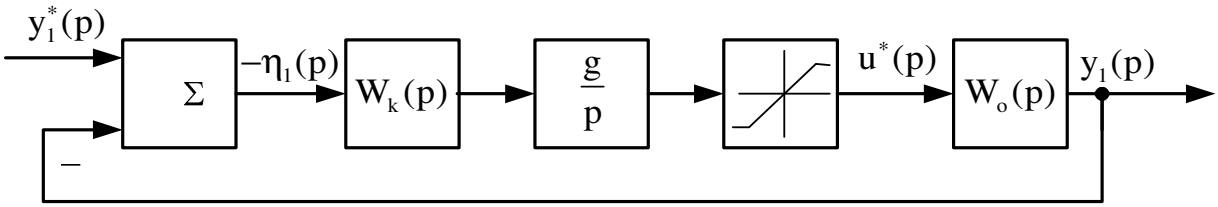


Рисунок 7.3 – Система зінтегральноюскладовою

Розглянемо передавальну функцію замкненої системи коли $u(p)=u^*(p)$, тобто коли керуючий вплив на вході об'єкта не досягнув рівня обмеження

$$\Phi(p)=\frac{y_1(p)}{y_1^*(p)}=\frac{\frac{g}{p}W_k(p)W_0(p)}{1+\frac{g}{p}W_k(p)W_0(p)}. \qquad (7.4)$$

При дотриманні умови (7.1) передавальна функція (7.4) перетворюється до виду

$$\Phi(p) = \frac{y_1(p)}{y_1^*(p)} = \frac{1}{\frac{1}{g}p + 1}. \qquad (7.5)$$

Іншими словами, замкнена САК еквівалентна аперіодичній ланці першого порядку зі сталою часу T=1/g. При подачі на вхід системи ступінчастогозадавального впливу y_1^*досить великої амплітуди рух її буде відбуватися за двома відрізками фазових траєкторій. В початковий момент під дією значного за абсолютною величиною впливу y_1^*відбудеться насичення регулятора і система керування працюватиме як розімкнена з максимально допустимим керуючим впливом u=1. Траєкторія руху вихідної змінної y_1 при цьому визначається виключно динамічними параметрами об'єкта керування і рівнем обмеження керуючого впливу. В міру розгону системи помилка почне знижуватися до тих пір, поки u* не стане дорівнювати одиниці. У цей момент відбудеться замикання системи і подальший рух буде здійснюватися по експоненті $\exp\left(\frac{1}{g}t\right)$ відповідно до передавальної функцією (7.5) до тих пір, поки помилка η_1 не стане дорівнювати нулю. Таким чином, вибором коефіцієнта підсилення регулятора g можна забезпечити протікання перехідного процесу переведення системи з початкового положення $\eta_1(0)$ в початок координат $\eta_1 = 0$ на кінцевій стадії з необхідною інтенсивністю. Якщо ж задавальний вплив $y_1^*(t)$як функція часу являє собою відтворювану траєкторію, при відпрацюванні якої на будь-якій ділянці керуючий вплив $u_1^*(t)$не досягає рівня обмеження, то розмикання системи не відбувається і вона веде себе як астатична система першого порядку. Ідеальне відтворення таких незбурених рухів з нульовою помилкою може бути здійснено в ковзному режимі, коли $g = \infty$, а функція sat трансформується в функцію sign.

Такий підхід до синтезу алгоритмів керування при певних умовах повністю відповідає розв’язанням задач аналітичного конструювання регуляторів.

Покажемо це на прикладі об'єкта керування довільного порядку, рух якого описується нормальною системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$py_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k + m_n u, \qquad (i = 1,2,...,n), \qquad (7.6)$$

де y_k, u – змінні стану та керуючий вплив у відносних одиницях; b_{ik}, m_n – постійні коефіцієнти. Перетворимо систему (7.6) до форми Фробеніуса

$$p\hat{y}_i = \hat{y}_{i+1}, \quad i = 1,2,...,n-1;$$

$$p\hat{y}_n = \sum_{i=1}^{n} -a_i \hat{y}_i + M_n u,$$

або в розширеному вигляді

$$p\hat{y}_1 = \hat{y}_2;$$
$$p\hat{y}_2 = \hat{y}_3; \qquad (7.7)$$
$$p\hat{y}_{n-1} = \hat{y}_n;$$
$$p\hat{y}_n = -a_1\hat{y}_1 - a_2\hat{y}_2 - ... - a_n\hat{y}_n + M_n u.$$

Перехід від системи (7.6) до системи (7.7) можна отримати за допомогою так званого лінійного неособо перетворення, основні положення якого будуть викладені пізніше. Необхідно відзначити, що в системі (7.7) $\hat{y}_1,...,\hat{y}_n$ $\hat{y}_1,...,\hat{y}_n$ - це фіктивні координати, введені в систему навмисно, причому деякі з них можуть збігатися з реальними фазовими координатами об'єкта керування. В даному випадку $\hat{y}_1$ збігається з y_1. Системи (7.6) і (7.7) описують рух одного і того ж об'єкта в різних фазових просторах.

Останнє рівняння системи (7.7) можна записати у вигляді

$$p^n\hat{y}_1 = -a_1\hat{y}_1 - a_2p\hat{y}_1 - a_3p^2\hat{y}_1 - ... - a_np^{n-1}\hat{y}_1 + M_n u, \qquad (7.8)$$

представивши всі складові в лівій і правій частині через похідні вихідної координати, тому що для системи (7.7)

$$\hat{y}_2 = p\hat{y}_1,\ \hat{y}_3 = p^2\hat{y}_1,...,\hat{y}_n = p^{n-1}\hat{y}_1,\ p\hat{y}_n = p^n\hat{y}_1.$$

Вираз (7.8) описує динаміку об’єктаз передавальною функцією

$$W_0(p) = \frac{y_1(p)}{u(p)} = \frac{M_n}{p^n + a_np^{n-1} + ... + a_2p + a_1}. \qquad (7.9)$$

Таким чином, коефіцієнти a_i, (i=1,...,n) в останньому рівнянні системи (7.7) є коефіцієнтами характерістичного полінома об'єкта керування (7.6).

Відповідно до викладеного вище модифікованого принципу симетрії і структурної схеми на рис.7.3 визначимо керуючий вплив

$$u = -\mathrm{sat}\left[\frac{g}{M_n}\left(\frac{a_1}{p} + a_2 + a_3p + ... + a_np^{n-2} + p^{n-1}\right)\eta_1\right]. \qquad (7.10)$$

Визначимо тепер оптимальне керування об'єктом (7.6) в результаті розв’язання задачі аналітичного конструювання регуляторів, для чого опишемо його динаміку рівняннями збуреного руху, що відповідають системі (7.7)

$$p\hat{\eta}_i = \hat{\eta}_{i+1}; \quad i = 1,2,...,n-1;$$
$$p\hat{\eta}_n = \sum_{i=1}^{n} -a_i\eta_i + M_nU, \qquad (7.11)$$

де $\hat{\eta}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_i^*$, $(i = 1,...,n)$ – відхилення координат істинного руху системи (7.7) від незбуреного; U – стабілізуюче керування. Вважаємо, що якість керування задано функціоналом

$$I = \int_0^\infty \left(\sum_{i,k=1}^{n} \hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k + cU^2\right)dt \qquad (7.12)$$

ізнайдемо керування $U(\hat{\eta}_1,...,\hat{\eta}_n)$, що доставляє мінімум інтегралу (7.12) на траєкторіях руху системи (7.11) з будь-якогопочаткового положення $\hat{\eta}_1(0),...,\hat{\eta}_n(0)$ в початок координат $\hat{\eta}_1(\infty) =,...,= \hat{\eta}_n(\infty) = 0$. Складемо основне функціональне рівняння Беллмана для системи (16.11) и функціонала (7.12)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i+\sum_{i,k=1}^{n}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k+cU^2=0,$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_1}\hat{\eta}_2+\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_2}\hat{\eta}_3+...+\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_{n-1}}\hat{\eta}_n+\\&+\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_n}\left(-a_1\hat{\eta}_1-a_2\hat{\eta}_2-...-a_n\hat{\eta}_n+M_nU\right)+\sum_{i,k=1}^{n}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k+cU^2=0.\end{aligned}\tag{7.13}$$

Для визначення шуканого керуванняпродиференціюємо вираз (7.13) заU

$$\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_n}M_n+2cU=0,$$

звідки

$$U=-\frac{M_n}{2c}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_n}.\tag{7.14}$$

В алгоритмі (7.14) $\hat{V}$ - функція Ляпунова – позитивно-визначена квадратична форма

$$\hat{V}=\sum_{i,k=1}^{n}\hat{v}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k,\quad \hat{v}_{ik}=\hat{v}_{ki}.\tag{7.15}$$

З урахування (7.15) оптимальне керування (7.14) приймає вигляду

$$U=-\frac{M_n}{c}\left(\hat{v}_{1n}\hat{\eta}_1+\hat{v}_{2n}\hat{\eta}_2+...+\hat{v}_{nn}\hat{\eta}_n\right).\tag{7.16}$$

З огляду на те, що в реальних системах має місце обмеження керуючого впливу$|U|\le 1$, і виразивши змінні $\hat{\eta}_2,...,\hat{\eta}_n$через $\eta_1=\hat{\eta}_1$ в силу рівнянь (7.11) остаточно отримаємо

$$U=-\mathrm{sat}\left[\frac{M_n}{c}\left(\hat{v}_{1n}+\hat{v}_{2n}p+...\hat{v}_{nn}p^{n-1}\right)\eta_1\right].\tag{7.17}$$

Зіставляючи алгоритми (7.10) і (7.17), можна побачити, що за винятком інтегральної складової$\frac{a_1}{p}$в (7.10) вони мають однакову структуру. Цей вираз дозволяє зробити висновок про те, що розв’язання задачі АКР можна трактувати з позицій концепцій зворотних задач динаміки, які випливають із властивостей симетрії систем автоматичного керування. Як покажуть подальші дослідження, такий підхід до проблеми синтезу систем оптимального керування дозволив розробити ряд простих обчислювальних процедур визначення структури і параметрів замкнених систем, що мають задані динамічні і статичні показники і властивості низької чутливості до широкого спектру дестабілізуючих факторів.

7.2 Функціонали якості та лінійні керування. Побудова функції Ляпунова для замкнених систем оптимального керування

Структура алгоритмів керування, знайдених в результаті застосування модифікованого принципу симетрії, відповідає структурі алгоритмів кеоування, синтезованих в результаті рішення задачі аналітичного конструювання регуляторів. Відомо, що для будь-якої лінійної замкнутої системи автоматичного керування завжди можна знайти функціонал якості, який мінімізується на траєкторіях керованого руху. Визначення такого функціоналу при відомих рівняннях динаміки об'єкта і заданому законі керування можна вважати зворотною задачею аналітичного конструювання регуляторів.

Алгоритм керування (3.23) об'єктом (3.24) при $\hat{\eta}_1 = \eta_1$, $\hat{U} = U$ і відсутності обмеження на модуль керуючого впливу має вигляд

$$U = -\frac{\hat{g}}{M_n}\left(\frac{a_1}{p} + a_2 + a_3 p + ... + a_n p^{n-2} + p^{n-1}\right)\eta_1 \qquad (7.18)$$

і забезпечує керований рух замкненої системи по траєкторії $y_1(t) = \exp\left(\frac{1}{\hat{g}}t\right)$ при y_1*(t)=l(t). Очевидно, що такий характер керованого руху є найкращим для будь-якої лінійної інерційної системи довільного порядку. У зв'язку з цим досить актуальною задачею є визначення виду функціонала якості, мінімізація якого гарантує протікання перехідного процесу замкненої системи при переводі її з будь-якого початкового положення $\eta_1(0)$ в початок координат $\eta_1 = 0$ за експоненціальним законом.

Алгоритм керування (7.18) містить інтегральну складову $\frac{a_1}{p}\eta_1$, що дає підставу для розгляду динаміки об'єкта керування в розширеному за рахунок введення додаткової координати $\eta_0 = \frac{1}{p}\eta_1$ фазовому просторі. Тоді динаміка об'єкта керування буде описана системою диференціальних рівнянь збуреного руху

$$\begin{aligned} &p\eta_0 = \eta_1; \\ &p\eta_1 = \hat{\eta}_2; \\ &p\hat{\eta}_i = \hat{\eta}_{i+1}, \quad i = 2,3,\ldots,n\text{-}1; \\ &p\hat{\eta}_n = \sum_{i=2}^{n}\left(-a_1\eta_1 - a_i\hat{\eta}_i\right) + M_n U. \end{aligned} \qquad (7.19)$$

Будемо вважати, що якість процесу керування об'єктом (7.19) задана функціоналом Льотова

$$I = \int_0^\infty \left(\sum_{i,k=0}^{n} \hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k + cU^2\right)dt = \int_0^\infty F(\eta, U)dt \qquad (7.20)$$

і знайдемо керуючий вплив $U(\eta_0, \eta_1, ..., \hat{\eta}_n)$, який доставляє мінімум інтегралу (7.20) на траєкторіях руху системи (7.19). Складемо основне функціональне рівняння Беллмана для системи (7.19) і функціоналу (7.20)

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i+\sum_{i,k=0}^{n}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k+cU^2=0. \qquad (7.21)$$

Підставивши в рівняння (7.21) значення похідних $p\hat{\eta}_i$ з (7.19) і, продиференціювавши отриманий вираз по U, знайдемо

$$M_n\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_n}+2cU=0,$$

звідки

$$U=-\frac{M_n}{2c}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_n}. \qquad (7.22)$$

В алгоритмі (7.22) $\hat{V}$ – функція Ляпунова

$$\hat{V}(\eta)=\sum_{i,k=0}^{n}\hat{v}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k,\ \hat{v}_{ik}=\hat{v}_{ki}. \qquad (7.23)$$

З урахуванням (7.23) оптимальне керування (7.22) приймає вид

$$\begin{aligned}U&=-\frac{M_n}{c}\left(\hat{v}_{0n}\eta_0+\hat{v}_{1n}\eta_1+...+\hat{v}_{in}\eta_i+...+\hat{v}_{nn}\eta_n\right)=\\&-\frac{M_n}{c}\left(\frac{\hat{v}_{0n}}{p}+\hat{v}_{1n}+\hat{v}_{2n}p+...+\hat{v}_{nn}p^{n-1}\right)\eta_1.\end{aligned} \qquad (7.24)$$

Прирівнявши вирази (7.8) і (7.24) , знайдемо

$$c=\frac{M_n^2}{\hat{g}},\ \hat{v}_{on}=a_1,\ \hat{v}_{1n}=a_2\quad,\ldots,\quad\hat{v}_{(n-1)n}=a_n,\ \hat{v}_{nn}=1. \qquad (7.25)$$

Співвідношення (7.25) дозволяють визначити оптимальну функцію Ляпунова (7.23) і інтегрант функціоналу (7.20), що гарантують аперіодичний перехідний процес переведення системи (7.18) з керуючим впливом (7.24) із початкового положення $\eta_1(0),...,\hat{\eta}_n(0)$ в початок координат $\eta_1=\hat{\eta}_2=...=\hat{\eta}_n=0.$

Для виявлення загальних закономірностей, які зв'язують параметри об'єкта керування виду (7.29) з коефіцієнтами функції Ляпунова (7.23) і інтегранта функціоналу (7.20), розглянемо спочатку систему керування третього порядку, збурений рух якої описується рівняннями

$$\begin{aligned}p\eta_1&=b_{11}\eta_1+b_{12}\eta_2+b_{13}\eta_3;\\p\eta_2&=b_{21}\eta_1+b_{22}\eta_2+b_{23}\eta_3;\\p\eta_3&=b_{31}\eta_1+b_{32}\eta_2+b_{33}\eta_3+m_3U,\end{aligned} \qquad (7.26)$$

і приведемо систему (7.26) до форми Фробеніуса

$$\begin{aligned}p\eta_1&=\hat{\eta}_2;\\p\hat{\eta}_2&=\hat{\eta}_3;\\p\hat{\eta}_3&=-a_1\eta_1-a_2\hat{\eta}_2-a_3\hat{\eta}_3+M_3U.\end{aligned} \qquad (7.27)$$

Коефіцієнти a_1 , a_2 , a_3 , можуть бути знайдені шляхом прирівнювання характеристичних визначників вільних об'єктів (7.26) і (7.27) та зіставлення коефіцієнтів при рівних степенях p

$$\begin{vmatrix} b_{11}-p & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-p & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 \\ 0 & -p & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3-p \end{vmatrix} =$$

$$-p^3-(-b_{11}-b_{22}-b_{33})p^2-(b_{11}b_{22}+b_{11}b_{33}+b_{22}b_{33}-b_{12}b_{21}-b_{13}b_{31}-b_{23}b_{32})p-$$
$$-(-b_{11}b_{22}b_{33}-b_{13}b_{21}b_{32}-b_{12}b_{23}b_{31}+b_{11}b_{23}b_{32}+b_{22}b_{13}b_{31}+b_{33}b_{12}b_{21})=$$
$$=-p^3-a_3p^2-a_2p-a_1.$$

З цього виразу коефіцієнти a_i системи (7.27) через параметри b_{ik} системи (7.26) визначаються співвідношеннями

$$a_1=-b_{11}b_{22}b_{33}-b_{13}b_{21}b_{32}-b_{12}b_{23}b_{31}+b_{11}b_{23}b_{32}+b_{22}b_{13}b_{31}+b_{33}b_{12}b_{21};$$
$$a_2=b_{11}b_{22}+b_{11}b_{33}+b_{22}b_{33}-b_{12}b_{21}-b_{13}b_{31}-b_{23}b_{32};$$
$$a_3=-b_{11}-b_{22}-b_{33}.$$

Відповідно з (7.24) керуючий вплив

$$U=-\frac{M_3}{c}\left(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right), \tag{7.28}$$

де $\hat{v}_{03}=a_1;\ \hat{v}_{13}=a_2;\ \hat{v}_{23}=a_3;\ \hat{v}_{33}=1,$

отримано для системи (7.27), розширенної до виду (7.29)

$$\begin{aligned} p\eta_0&=\eta_1; \\ p\eta_1&=\hat{\eta}_2; \\ p\hat{\eta}_2&=\hat{\eta}_3; \\ p\hat{\eta}_3&=-a_1\eta_1-a_2\hat{\eta}_2-a_3\hat{\eta}_3+M_3U. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Для системи (17.12) функція Ляпунова (17.6) визначається виразом

$$\begin{aligned} \hat{V}(\eta)&=\hat{v}_{00}\eta_0^2+2\hat{v}_{01}\eta_0\eta_1+2\hat{v}_{02}\eta_0\hat{\eta}_2+2\hat{v}_{03}\eta_0\hat{\eta}_3+\hat{v}_{11}\eta_1^2+ \\ &+2\hat{v}_{12}\eta_1\hat{\eta}_2+2\hat{v}_{13}\eta_1\hat{\eta}_3+\hat{v}_{22}\hat{\eta}_2^2+2\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3^2. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Знайдемо повну похідну функції Ляпунова (7.30) на траєкторіях руху системи (7.28) з керуванням (7.27)

$$\frac{d\hat{V}}{dt}=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_i}\frac{d\hat{\eta}_i}{dt}=2(\hat{v}_{00}\eta_0+\hat{v}_{01}\eta_1+\hat{v}_{02}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{03}\hat{\eta}_3)\eta_1+2(\hat{v}_{01}\eta_0+\hat{v}_{11}\eta_1+\hat{v}_{12}\eta_2+\hat{v}_{13}\eta_3)\hat{\eta}_2+$$
$$+2(\hat{v}_{02}\eta_0+\hat{v}_{12}\eta_1+\hat{v}_{22}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_3)\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3)\times$$
$$\times\left[-a_1\eta_1-a_2\hat{\eta}_2-a_3\hat{\eta}_3-\frac{M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right]=2(\hat{v}_{00}-\hat{v}_{03}a_1)\eta_0\eta_1+$$
$$+2(\hat{v}_{01}-\hat{v}_{03}a_2)\eta_0\hat{\eta}_2+2(\hat{v}_{02}-\hat{v}_{03}a_3)\eta_0\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{01}-\hat{v}_{13}a_1)\eta_1^2+2(\hat{v}_{02}+\hat{v}_{11}-\hat{v}_{23}a_1-\hat{v}_{13}a_2)\eta_1\hat{\eta}_2+$$
$$+2(\hat{v}_{03}+\hat{v}_{12}-\hat{v}_{33}a_1-\hat{v}_{13}a_3)\eta_1\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{12}-\hat{v}_{23}\hat{a}_2)\hat{\eta}_2^2+2(\hat{v}_{13}+\hat{v}_{22}-\hat{v}_{33}a_2-\hat{v}_{23}a_3)\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3+$$
$$+2(\hat{v}_{23}-\hat{v}_{33}a_3)\hat{\eta}_3^2-\frac{2M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)^2.$$

Для того, щоб повна похідна функції Ляпунова була негативною, прирівняємо до нуля вирази, які стоять при $\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k$, (i,k=0,l,...,n). Вирішивши отриману в результаті цього систему алгебраїчних рівнянь, знайдемо такі значення коефіцієнтів функції Ляпунова:

$$\hat{v}_{00} = a_1^2;\ \hat{v}_{01} = a_1 a_2;\ \hat{v}_{02} = a_1 a_3;\ \hat{v}_{03} = a_1;\quad \hat{v}_{11} = a_2^2;$$

$$\hat{v}_{12} = a_2 a_3;\quad \hat{v}_{13} = a_2;\quad \hat{v}_{22} = a_3^2;\quad \hat{v}_{23} = a_3;\quad \hat{v}_{33} = 1. \qquad (7.31)$$

З урахуванням співвідношень (7.31) повна похідна функції Ляпунова (7.30)

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = -\frac{2M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{03}\hat{\eta}_0 + \hat{v}_{13}\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{33}p^2\hat{\eta}_1\right)^2$$

при c>0 є негативно визначеною, в результаті чого забезпечується умова асимптотичної стійкості системи (7.28) з керуванням (7.27). Підставимо значення повної похідної функції Ляпунова в основне функціональне рівняння Беллмана і визначимо інтегрант F функціоналу якості, що є критерієм оптимальності системи (7.28) з керуванням (7.27).

Розв'язавшиосновне функціональне рівняннЯБеллмана

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_i}\frac{d\hat{\eta}_i}{dt} + F = 0 \qquad (7.32)$$

відносно F, отримаємо

$$F = -\frac{2M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{03}\hat{\eta}_0 + \hat{v}_{13}\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{33}p^2\hat{\eta}_1\right)^2. \qquad (7.33)$$

Інтегранту F (7.33) може бути поставлено у відповідність підінтегральний вираз функціоналу якості (7.20) в силу ідентичності рівнянь (7.33) і (7.21)

$$\frac{2M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{03}\hat{\eta}_0 + \hat{v}_{13}\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{33}p^2\hat{\eta}_1\right)^2 = \sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k + cU^2. \qquad (7.34)$$

З урахуванням (7.28) рівняння (7.34) може бути записано у вигляді

$$\frac{M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{03}\hat{\eta}_0 + \hat{v}_{13}\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1 + \hat{v}_{33}p^2\hat{\eta}_1\right)^2 + cU^2 = \sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k + cU^2. \qquad (7.35)$$

Керуючий вплив (7.28) переводить систему (7.30) з початкового положення $\left(\eta_1(0), \hat{\eta}_2(0), \hat{\eta}_3(0)\right)$ в початок координат $\eta_1(\infty) = \hat{\eta}_2(\infty) = \hat{\eta}_3(\infty) = 0$, мінімізуючи функціонал виду

$$\hat{I} = \int_0^\infty\left(\sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k + cU^2\right)dt,\qquad \hat{w}_{ik} = \hat{w}_{ki}. \qquad (7.36)$$

Коефіцієнти $\hat{w}_{ik}$ інтегранта функціонала (7.36) визначаються в результаті розв'язання рівняння (7.35) і відповідно дорівнюють

$$\hat{w}_{00} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{03}^2;\ \hat{w}_{01} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{03}\hat{v}_{13};\ \hat{w}_{02} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{03}\hat{v}_{23};\ \hat{w}_{03} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{03}\hat{v}_{33};$$

$$\hat{w}_{11} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{13}^2\hat{v}_{12};\ \hat{w}_{12} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{13}\hat{v}_{23};\ \hat{w}_{13} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{13}\hat{v}_{33};\ \hat{w}_{22} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{23}^2; \qquad (7.37)$$

$$\hat{w}_{23} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{23}\hat{v}_{33};\ \hat{w}_{33} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{33}^2.$$

Виконавши зворотне перетворення системи (7.28) до виду (7.37), отримаємо керуючий вплив

$$U = -\frac{m_3}{c}[(-b_{11}b_{22}b_{33} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} + b_{33}b_{12}b_{21})\eta_0 +$$
$$+ (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})\eta_1 + (b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33})\eta_2 + (b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13})\eta_3 \ ],$$

або $U = -\frac{m_3}{c}(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)$ (7.38)

для об'єкта керування

$$\begin{aligned} p\eta_0 &= \eta_1; \\ p\eta_1 &= b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + b_{13}\eta_3; \\ p\eta_2 &= b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3; \\ p\eta_3 &= b_{31}\eta_1 + b_{32}\eta_2 + b_{33}\eta_3 + m_3U. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Задамося функцією Ляпунова

$$V(\eta) = v_{00}\eta_0^2 + 2v_{01}\eta_0\eta_1 + 2v_{02}\eta_0\eta_2 + 2v_{03}\eta_0\eta_3 + v_{11}\eta_1^2 +$$
$$+ 2v_{12}\eta_1\eta_2 + 2v_{13}\eta_1\eta_3 + v_{22}\eta_2^2 + 2v_{23}\eta_2\eta_3 + v_{33}\eta_3^2 \quad (7.40)$$

і знайдемо її повну похідну за часом на траєкторіях руху системи (7.39) з керуючим впливом (7.38)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt} = 2(v_{00}\eta_0 + v_{01}\eta_1 + v_{02}\eta_2 + v_{03}\eta_3)\eta_1 + 2(v_{01}\eta_0 + v_{11}\eta_1 + v_{12}\eta_2 + v_{13}\eta_3)\times$$
$$\times(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + b_{13}\eta_3) + 2(v_{02}\eta_0 + v_{12}\eta_1 + v_{22}\eta_2 + v_{23}\eta_3)(b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3) +$$
$$+ 2(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)[b_{31}\eta_1 + b_{32}\eta_2 + b_{33}\eta_3 - \frac{m_3^2}{c}(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)\ ] =$$
$$= 2(v_{00} + v_{01}b_{11} + v_{02}b_{21} + v_{03}b_{33}\ )\eta_0\eta_1 + 2(v_{01}b_{12} + v_{02}b_{22} + v_{03}b_{32}\ )\eta_0\eta_2 + 2(v_{01}b_{13} + v_{02}b_{23} +$$
$$+ v_{03}b_{33}\ )\eta_0\eta_3 + 2(v_{01} + v_{11}b_{11} + v_{12}b_{21} + v_{13}b_{31}\ )\eta_1^2 + 2(v_{02} + v_{12}b_{11} + v_{11}b_{12} + v_{22}b_{21} + v_{12}b_{22} +$$
$$+ v_{23}b_{31} + v_{13}b_{32}\ )\eta_1\eta_2 + 2(v_{03} + v_{13}b_{11} + v_{11}b_{13} + v_{23}b_{21} + v_{12}b_{23} + v_{33}b_{31} + v_{13}b_{33}\ )\eta_1\eta_3 +$$
$$+ 2(v_{12}b_{21} + v_{22}b_{22} + v_{23}b_{32}\ )\eta_2^2 + 2(v_{13}b_{12} + v_{12}b_{13} + v_{23}b_{22} + v_{22}b_{23} + v_{33}b_{32} + v_{23}b_{33}\ )\eta_2\eta_3 +$$
$$+ 2(v_{13}b_{13} + v_{23}b_{23} + v_{33}b_{33}\ )\eta_3^3 - \frac{2m_3^2}{c}(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)^2.$$

Для визначення коефіцієнтів функції (7.40) через параметри об'єкта керування (7.39) прирівняємо до нуля вирази, які стоять при $\eta_i\eta_k$ (i,k=0,l,-,...,n). В результаті розв’язаннясистеми алгебраїчних рівнянь отримаємо наступні значення шуканих коефіцієнтів:

$$v_{00} = (-b_{11}b_{22}b_{33} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} +$$
$$+ b_{33}b_{12}b_{21})^2/(b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13})$$
$$v_{01} = (-b_{11}b_{22}b_{33} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} +$$
$$+ b_{33}b_{12}b_{21})(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})/(b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13});$$
$$v_{02} = (-b_{11}b_{22}b_{33} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} +$$
$$+ b_{33}b_{12}b_{21})(b_{13}b_{32} - b_{33}b_{12})/(b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13});$$
$$v_{03} = (-b_{11}b_{22}b_{33} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{23}b_{31} + b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} +$$
$$+ b_{33}b_{12}b_{21}); \quad (7.41)$$

$v_{11} = (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})^2 / (b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13});$
$v_{12} = (b_{13}b_{32} - b_{33}b_{12})(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) / (b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13});;$
$v_{13} = (b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32});$
$v_{22} = (b_{13}b_{32} - b_{33}b_{12})^2 / (b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13});$
$v_{23} = (b_{13}b_{32} - b_{33}b_{12});$
$v_{33} = (b_{12}b_{23} - b_{22}b_{13}).$

Аналіз виразів (7.38) показує, що існує однозначний зв'язок між знайденими коефіцієнтами функції Ляпунова

$$v_{00} = \frac{v_{03}^2}{v_{33}};\ v_{01} = \frac{v_{03}v_{13}}{v_{33}};\ v_{02} = \frac{v_{03}v_{23}}{v_{33}};$$
$$v_{11} = \frac{v_{13}^2}{v_{33}};\ v_{12} = \frac{v_{13}v_{23}}{v_{33}};\ v_{22} = \frac{v_{23}^2}{v_{33}}. \tag{7.42}$$

Легко помітити, що коефіцієнт v_{03} визначається через коефіцієнти b_{ik} (i,k=l,2,3) системи (7.39) за формулою

$$v_{03} = (-1)^3 \Delta, \tag{7.43}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \tag{7.44}$$

а коефіцієнти v_{i3} (i =1, 2, 3) є алгебраїчними доповненнями і-их елементів першого стовпця визначника (7.44).

Повна похідна функції Ляпунова (7.40) за часом

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2m_3^2}{c}(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)^2, \tag{7.45}$$

будучи негативно визначеною на траєкторіях руху системи (7.39), забезпечує виконання умови асимптотичної стійкості останньої.

Оскільки похідна (7.44) по суті є підінтегральною функцією критерію оптимальності, функціоналом якості системи (7.39) з керуванням (7.38) є інтеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{2m_3^2}{c}(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)^2 dt =$$
$$= \int_0^\infty \left[\frac{m_3^2}{c}(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)^2 + cU^2 \right] dt. \tag{7.46}$$

Приведемо функціонал (17.29) до стандартного вигляду

$$I = \int_0^\infty \left(\sum_{i,k=0}^{3} w_{ik}\eta_i\eta_k + cU^2 \right) dt, \qquad w_{ik} = w_{ki}. \tag{7.47}$$

Значення вагових коефіцієнтів w_{ik} функціоналу (7.47) визначаються в

результаті розв’язаннярівняння

$$\sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k=\frac{m_3^2}{c}\left(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3\right)^2,$$

звідки

$$\begin{aligned}&w_{00}=gv_{03}^2;w_{01}=gv_{03}v_{13};w_{02}=gv_{03}v_{23};w_{03}=gv_{03}v_{33};\\&w_{11}=gv_{13}^2;w_{12}=gv_{13}v_{23};w_{13}=gv_{13}v_{33};w_{22}=gv_{23}^2;\\&w_{23}=gv_{23}v_{33};w_{33}=gv_{33}^2,\end{aligned}\qquad(7.48)$$

де $g=\frac{m_3^2}{c}$ –коефіцієнт підсилення регулятора.

Таким чином, призначення в якості критеріїв оптимальності інтегральних квадратичних функціоналів (7.36) або (7.47), вагові коефіцієнти яких підпорядковуються співвідношенням (7.37), (7.32) або (7.48), (7.42), дозволяє синтезувати алгоритми оптимального керування в різних фазових просторах, що гарантують замкненій системі аперіодичний перехідний процес $y_1(t)=\exp\left(\frac{1}{g}t\right)$. Важливим при цьому є те, що стала часу перехідного процесу однозначно пов'язана з ваговими коефіцієнтами функціоналів якості через коефіцієнт підсилення регулятора. Крім того, замкнена САК при цьому є астатичною за рахунок наявності інтегральної складової в законі керування. Якщо з алгоритмів (17.28) і (17.28) виключити інтегральні складові $v_{03}\frac{1}{p}\eta_1$, то структура отриманих у такий спосіб законів керування буде в точності відповідати структурі алгоритмів керування, визначених в результаті розв’язання задачі аналітичного конструювання: регуляторів методом Льотова-Калмана. Розглянемо докладніше цей випадок.

Алгоритм керування виду

$$U=-\frac{M_3}{c}\left(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\qquad(7.49)$$

мінімізує функціонал

$$\hat{I}=\int_0^\infty\left(\sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k+cU^2\right)dt,\qquad \hat{w}_{ik}=\hat{w}_{ki},\qquad(7.50)$$

на траєкторіях руху системи, структурна схема якої в загальному виглядідля даного випадку наведена на рис. 7.4.

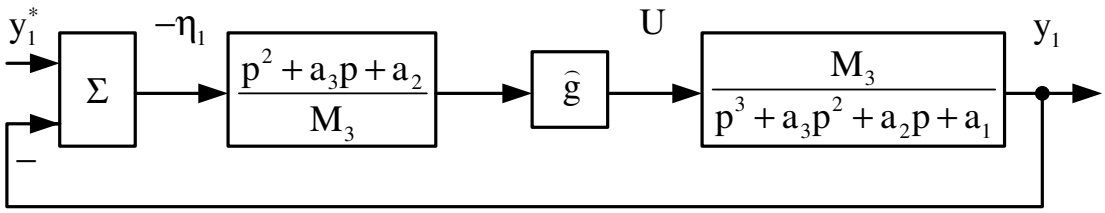


Рисунок 7.4 – Структура системи оптимального керування

Передавальна функція такої системи в замкненому стані

$$\Phi(p)=\frac{y_1(p)}{y_1{}^*(p)}=\frac{\hat{g}(p^2+a_3p+a_2)}{p^3+(a_3+\hat{g})p^2+(a_2+\hat{g}a_3)p+(a_1+\hat{g}a_2)}. \qquad (7.51)$$

Аналіз передавальної функції (7.51) показує, що перехідна функція замкненої системи близька до експоненційної $y_1(t)=\exp\left(\frac{1}{\hat{g}}t\right)$ при $y_1{}^*(t)=1(t)$. Однак в статиці система має помилкузазадавальним впливом

$$\eta_1(\infty)=\frac{a_1}{a_1+\hat{g}a_2}y_1{}^*,$$

що робить нереальною умову збіжності інтеграла (7.50) на відкритому інтервалі інтегрування. У зв'язку з цим доцільно обмежити верхню межу інтегрування значенням $T=5\frac{1}{\hat{g}}$. Тоді функціонал якості (7.50) набуде вигляду

$$\hat{I}=\int_0^T\left(\sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\eta_k+cU^2\right)dt, \qquad \hat{w}_{ik}=\hat{w}_{ki}. \qquad (7.52)$$

Для обчислення коефіцієнтів w_{ik} функціоналу (7.52) задамося функцією Ляпунова

$$\hat{V}(\eta)=\hat{v}_{11}\eta_1^2+2\hat{v}_{12}\eta_1\hat{\eta}_2+2\hat{v}_{13}\eta_1\hat{\eta}_3+\hat{v}_{22}\hat{\eta}_2^2+2\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3^2,$$

коефіцієнти якої задовольняють співвідношенням (7.32), і визначимо її повну похідну за часом, взяту в силу системи (7.27) з керуючим впливом (7.49)

$$\frac{d\hat{V}}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{\eta}_i}\frac{d\hat{\eta}_i}{dt}=2(\hat{v}_{11}\eta_1+\hat{v}_{12}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{13}\hat{\eta}_3)\hat{\eta}_2+2(\hat{v}_{12}\eta_1+\hat{v}_{22}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_3)\hat{\eta}_3+$$

$$+2(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3)\left[-a_1\eta_1-a_2\hat{\eta}_2-a_3\hat{\eta}_3-\frac{M_3^2}{c}(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1)\right]=$$

$$=-2\hat{v}_{13}a_1\eta_1^2+2(\hat{v}_{11}-\hat{v}_{23}a_1-\hat{v}_{13}a_2)\eta_1\hat{\eta}_2+2(\hat{v}_{12}-\hat{v}_{33}a_1-\hat{v}_{13}a_3)\eta_1\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{12}-\hat{v}_{23}\hat{a}_2)\hat{\eta}_2^2+$$

$$+2(\hat{v}_{13}+\hat{v}_{22}-\hat{v}_{33}a_2-\hat{v}_{23}a_3)\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{23}-\hat{v}_{33}a_3)\hat{\eta}_3^2-\frac{2M_3^2}{c}(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1)^2 \qquad (7.53)$$

Після підстановки в (7.53) значень коефіцієнтів v_{ik}, заданих співвідношеннями (7.32), отримаємо остаточний вираз для повної похідної функції Ляпунова, яка відповідно до (7.33) дорівнює інтегранту функціоналу якості, взятому з протилежним знаком,

$$\frac{d\hat{V}}{dt}=-2\left(\hat{v}_{01}\eta_1^2+\hat{v}_{02}\eta_1p\eta_1+\hat{v}_{03}\eta_1p^2\eta_1\right)-\frac{2M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{13}\hat{\eta}_1+\hat{v}_{23}p\hat{\eta}_1+\hat{v}_{33}p^2\hat{\eta}_1\right)^2=-F.$$

Наведемо підінтегральний вираз F до стандартного виду, визначеного інтегрантом функціоналу (7.36),

$$2\left(\hat{v}_{01}\eta_1^2+\hat{v}_{02}\eta_1p\eta_1+\hat{v}_{03}\eta_1p^2\eta_1\right)+\frac{2M_3^2}{c}\left(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)^2=\sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k+cU^2.$$

Прирівнявши співмножники, що стоять при однакових змінних $\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k$,

остаточно отримаємо такі вирази для визначення коефіцієнтів функціоналу (6.36)

$$\hat{w}_{11} = 2\hat{v}_{01} + \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{13}^2;\ \hat{w}_{12} = \hat{v}_{02} + \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{13}\hat{v}_{23};\ \hat{w}_{13} = \hat{v}_{03} + \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{13}\hat{v}_{33};$$
$$\hat{w}_{22} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{23}^2;\ \hat{w}_{23} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{23}\hat{v}_{33};\ \hat{w}_{33} = \frac{M_3^2}{c}\hat{v}_{33}^2. \tag{7.54}$$

Вирішимо аналогічнузавдачу для узагальненого об'єкта третього порядку, динаміка якого описується системою рівнянь збуреного руху в формі Коші. Керуючий вплив

$$U = -\frac{m_3}{c}\left(v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3\right) \tag{7.55}$$

здійснює переведення системи (7.25) з початкового положення в кінцеве таким чином, щоб функціонал якості

$$I = \int_0^T \left(\sum_{i,k=0}^{3} w_{ik}\eta_i\eta_k + cU^2 \right) dt, \qquad w_{ik} = w_{ki} \tag{7.56}$$

приймав найменше значення на траєкторіях руху системи (7.26).

В алгоритмі (7.55) v_{13}, v_{23}, v_{33} - коефіцієнти функції Ляпунова

$$V(\eta) = v_{11}\eta_1^2 + 2v_{12}\eta_1\eta_2 + 2v_{13}\eta_1\eta_3 + v_{22}\eta_2^2 + 2v_{23}\eta_2\eta_3 + v_{33}\eta_3^2, \tag{7.57}$$

які визначаються виразами (7.41).

Обчислимо повну похідну за часом функції (7.57) на траєкторіях руху системи (7.26) з керуючим впливом (7.55)

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt} = 2\left(v_{11}\eta_1 + v_{12}\eta_2 + v_{13}\eta_3\right)\left(b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + b_{13}\eta_3\right) + \\
&+ 2\left(v_{12}\eta_1 + v_{22}\eta_2 + v_{23}\eta_3\right)\left(b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3\right) + 2\left(v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3\right)\times \\
&\times\left[b_{31}\eta_1 + b_{32}\eta_2 + b_{33}\eta_3 - \frac{m_3^2}{c}\left[v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3\right]\right] = \\
&= 2\left(v_{11}b_{11} + v_{12}b_{21} + v_{13}b_{31}\right)\eta_1^2 + \\
&+ 2\left(v_{12}b_{11} + v_{11}b_{12} + v_{22}b_{21} + v_{12}b_{22} + v_{23}b_{31} + v_{13}b_{32}\right)\eta_1\eta_2 + \\
&+ 2\left(v_{13}b_{11} + v_{11}b_{13} + v_{23}b_{21} + v_{12}b_{23} + v_{33}b_{31} + v_{13}b_{33}\right)\eta_1\eta_3 + \\
&+ 2\left(v_{12}b_{21} + v_{22}b_{22} + v_{23}b_{32}\right)\eta_2^2 + \\
&+ 2\left(v_{13}b_{12} + v_{12}b_{13} + v_{23}b_{22} + v_{22}b_{23} + v_{33}b_{32} + v_{23}b_{33}\right)\eta_2\eta_3 + \\
&+ 2\left(v_{13}b_{13} + v_{23}b_{23} + v_{33}b_{33}\right)\eta_3^3 - \frac{2m_3^2}{c}\left(v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3\right)^2.
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Підставивши в (7.58) значення коефіцієнтів (7.41), отримаємо остаточний вираз повної похідної за часом функції (7.57)

$$\frac{dV}{dt} = -2(v_{01}\eta_1^2 + v_{02}\eta_1\eta_2 + v_{03}\eta_1\eta_3) - \frac{2m_3^2}{c}(v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)^2. \tag{7.59}$$

Оскільки відповідно до основних функціональних рівняньБеллмана (7.21)

похідна (7.59) є підінтегральнм виразом функціоналу якості (7.56), узятим зі зворотним знаком, то, вирішивши рівняння

$$2(v_{01}\eta_1^2 + v_{02}\eta_1\eta_2 + v_{03}\eta_1\eta_3) + \frac{2m_3^2}{c}(v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3)^2 = \sum_{i,k=0}^{3}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k + cU^2$$

отримаємо наступні значення коефіцієнтів w_{ik}:

$$w_{11} = 2v_{01} + \frac{m_3^2}{c}v_{13}^2;\ w_{12} = v_{02} + \frac{m_3^2}{c}v_{13}v_{23};\ w_{13} = v_{03} + \frac{m_3^2}{c}v_{13}v_{33};$$
$$w_{22} = \frac{m_3^2}{c}v_{23}^2;\ w_{23} = \frac{m_3^2}{c}v_{23}v_{33};\ w_{33} = \frac{m_3^2}{c}v_{33}^2. \qquad (7.60)$$

Провівши аналогічні міркування для систем більш високих порядків і розглянувши при цьому керування не вихідної змінної, а будь-якої з проміжних $\eta_2, \eta_3, ..., \eta_n$, після узагальнення отриманих результатів, можна зробити наступні висновки.

Для об'єкта керування, динаміка якого описується системою диференціальних рівнянь збуреного руху в формі Коші

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + m_n U, \qquad (7.61)$$

закон керування виду

$$U_j = -\frac{m_n}{c_j}\sum_{i=0}^{n} v_{in}^j\eta_i = -\frac{g_j}{m_n}\sum_{i=0}^{n} v_{in}^j\eta_i \qquad (7.62)$$

мінімізирує інтегральний квадратичний функціонал якості

$$I_j = \int_0^\infty \left(\frac{m_n^2}{c_j}\left(\sum_{i=0}^{n} v_{in}^j\eta_i\right) + c_j U_j^{2^2}\right)dt = \int_0^\infty \left(g_j\left(\sum_{i=0}^{n} v_{in}^j\eta\right)^2 + \frac{m_n^2}{g_j}U_j^2\right)dt =$$
$$= \int_0^\infty \left(\sum_{i,k=0}^{n} w_{ik}\eta_i\eta_k + c_j U_j^{2^2}\right)dt, \qquad w_{ik} = w_{ki} \qquad (7.63)$$

гарантуючи при цьому експонентний характер керованого руху регульованої змінної $\eta_j = -\exp\left(\frac{1}{g_j}t\right)$ при ступінчастій зміні задавального впливу $y_j^* = l(t)$ і забезпечуючи замкнутій системі астатические властивості за рахунок наявності в своєму складі інтегральної складової $\eta_0 = \frac{1}{p}\eta_j$. Коефіцієнтами алгоритму керування (7.62) є коефіцієнти функції Ляпунова

$$V(\eta) = \sum_{i,k=0}^{n} v_{ik}^j\eta_i\eta_k,\ v_{ik}^j = v_{ki}^j, \qquad (7.64)$$

які пов'язані між собою співвідношеннями

$$v_{ik}^j = \frac{v_{in}^j v_{kn}^j}{v_{nn}^j},\quad (i, k = 0,1,2,..., n). \qquad (7.65)$$

Коефіцієнти $v^j{}_{in}$, $v^j{}_{kn}$, $v^j{}_{nn}$, що входять до керуючих впливів (7.63) і в вираз (7.65), визначаються відповідно мінорами i-их, k-их або n-их елементів j-го стовпчика визначника коефіцієнтів системи (7.60)

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1(n-1)} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{21(n-1)} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{1(n-1)} & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n(n-1)} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

за формулою

$$v_{in}^{j} = (-1)^{i+n}(-1)^{j+1}M_{ij,}\ i = 1,2,\dots,n. \tag{7.66}$$

Коефіцієнт v_{0n} при інтегральній складовій в законі керування дорівнює

$$v_{0n} = (-1)^{n}\Delta \tag{7.67}$$

незалежно від номера регульованої змінної.

Вагові коефіцієнти функціонала (7.62) однозначно зв’язані з коефіцієнтами функції Ляпунова (7.63) співвідношеннями

$$w_{ik} = \frac{m^{2}{}_{n}}{c_{j}} v_{in}^{j} v_{kn}^{j} = g_{j} v_{in}^{j} v_{kn}^{j}. \tag{7.68}$$

Якщо динаміка об'єкта керування описана системою диференційних рівнянь збуреного руху в формі Фробеніуса

$$\begin{aligned} p\hat{\eta} &= \hat{\eta}_{i+1};\ (i = 1,\dots,n-1) \\ p\hat{\eta} &= \sum_{i=1}^{n} -a_{i}\hat{\eta}_{i} + M_{n}U, \end{aligned} \quad ; \tag{7.69}$$

то керуючийевплив виду

$$U_{j} = -\frac{M_{n}}{c_{j}}\sum_{i=0}^{n}\hat{v}_{in}p^{i-j}\eta_{j} = -\frac{\hat{g}_{j}}{M_{n}}\sum_{i=0}^{n}\hat{v}_{in}p^{i-j}\eta_{j} \tag{7.70}$$

мінімізує інтегральний квадратичний функціонал

$$\begin{aligned} \hat{I}_{j} &= \int_{0}^{\infty}\left(\frac{M_{n}^{2}}{c_{j}}\left(\sum_{i=0}^{n}\hat{v}_{in}p^{i-j}\eta_{j}\right)^{2} + c_{j}U_{j}^{2}\right)dt = \int_{0}^{\infty}\left(\hat{g}_{j}\left(\sum_{i=0}^{n}\hat{v}_{in}p^{i-j}\eta_{j}\right)^{2} + \frac{M_{n}^{2}}{\hat{g}_{j}}U_{j}^{2}\right)dt = \\ &= \int_{0}^{\infty}\left(\sum_{i,k=0}^{n}\hat{w}_{ik}p^{i-j}\eta_{j}p^{k-j}\eta_{j} + c_{j}U_{j}^{2}\right)dt = \int_{0}^{\infty}\left(\sum_{i,k=0}^{n}\hat{w}_{ik}\hat{\eta}_{i}\hat{\eta}_{k} + c_{j}U_{j}^{2}\right)dt, \hat{w}_{ik} = \hat{w}_{ki} \end{aligned} \tag{7.71}$$

на траєкторіях руху системи (7.68). При цьому гарантується аперіодичний перехідний процес переведення регульованої змінної η_{j} з початкового положення в кінцеве з еквівалентноюсталою часу $T_{e} = 1/\hat{g}_{j}$ в замкненій

астатичній системі.

Вагові коефіцієнти наведеного функціоналу якості та алгоритму керування (7.69) однозначно визначаються через коефіцієнти функції Ляпунова

$$\hat{V}(\hat{\eta}) = \sum_{i,k=0}^{n} \hat{v}_{ik}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_k, \qquad \hat{v}_{ik} = \hat{v}_{ki} \tag{7.72}$$

за формулою

$$\hat{w}_{ik} = \frac{M_n^2}{c_j}\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn} = \hat{g}_j\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn}. \tag{7.73}$$

У свою чергу коефіцієнти функції (7.71) пов'язані з параметрами об'єкта керування (7.68) співвідношеннями

$$\hat{v}_{ik} = a_{(i+1)}a_{(k+1)}, \quad (i,k = 0,1,...,n). \tag{7.74}$$

Якщоу виразі (7.73) i=n або k=n, то $a_{(i+1)}$ або $a_{(k+1)}$ приймають значення, рівні 1.

Як відомо, існує досить широкий клас електромеханічних об'єктів керування, для яких характерними є жорсткі вимоги до динамічних характеристик і відносно м'які - до статичних. До числа таких об'єктів відноситься більшість автоматизованих електроприводів допоміжних механізмів металургійного виробництва. При керуванні цими приводами із законів керування можуть бути виключені інтегральні складові і підвищений за рахунок цього запас стійкості замкнутої системи. Тоді алгоритм керування

$$U_j = -\frac{m_n}{c_j}\sum_{i=1}^{n} v_{in}^j\eta_i = -\frac{g_j}{m_n}\sum_{i=1}^{n} v_{in}^j\eta_i \tag{7.75}$$

здійснює переведення регульованої змінної з початкового положення в кінцеве по траєкторії, близькій до експоненційної з еквівалентною сталою часу $T_e = 1/g_j$ доставляючи мінімум інтегральному квадратичному функціоналу

$$\begin{aligned} I_j &= \int_0^T \left(2\sum_{i=0}^{n} v_{0i}^j\eta_i\eta_j + \frac{m_n^2}{c_j}\left(\sum_{i=1}^{n} v_{in}^j\eta_i\right)^2 + c_jU_j^2\right)dt = \\ &= \int_0^T \left(2\sum_{i=1}^{n} v_{0i}^j\eta_i\eta_j + g_j\left(\sum_{i=1}^{n} v_{in}^j\eta_i\right)^2 + \frac{m_n^2}{g_i}U_j^2\right)dt = \\ &= \int_0^T \left(\sum_{i,k=0}^{n} w_{ik}\eta_i\eta_k + c_jU_j^2\right)dt, \qquad w_{ik} = w_{ki} \end{aligned} \tag{7.76}$$

на траекторіяхрухусистемы (7.60).

В алгоритмі (7.75) v_{in}^j є коефіцієнтами функції Ляпунова

$$V(\eta) = \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}^j\eta_i\eta_k, \; v_{ik}^j = v_{ki}^j \tag{7.77}$$

які визначаються співвідношеннями (7.64), (7.65).

Вагові коефіцієнти критерію якості. (7.65) однозначно пов'язані з

коефіцієнтами функції Ляпунова (7.76) залежностями

$$w_{ik} = \frac{m_n^2}{c_j} v_{in}^j v_{kn}^j = g_j v_{in}^j v_{kn}^j, \qquad \text{при } i,k \neq j;$$

$$w_{ik} = v_{0i}^j + \frac{m_n^2}{c_j} v_{in}^j v_{kn}^j = v_{0i}^j + g_j v_{in}^j v_{kn}^j, \qquad \text{при } i \neq k, k = j; \qquad (7.78)$$

$$w_{ik} = 2v_{0i}^j + \frac{m_n^2}{c_j} v_{in}^j v_{kn}^j = 2v_{0i}^j + g_j v_{in}^j v_{kn}^j, \quad \text{при } i = k = j;$$

де коефіцієнти v_{0i}^j визначаються співвідношеннями (7.64)–(7.66).

Якщо динаміка об'єкта керування описується диференціальними рівняннями збуреного руху в формі Фробеніуса (7.68), то, виключивши з алгоритму керування (7.69) інтегральні складові $\sum_{i=0}^{j-1} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j$, отримаємо

$$U_j = -\frac{M_n}{c_j} \sum_{i=j}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j = -\frac{\hat{g}_j}{M_n} \sum_{i=j}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_{j.}. \qquad (7.79)$$

Керуючий вплив (7.79) здійснює переведення об'єкта керування (7.68) з початкового положення в кінцеве по траєкторії, близькій до експоненційної з постійною часу $T = 1/\hat{g}_j$, мінімізуючи функціонал

$$I_j = \int_0^T \left(2\sum_{i=1}^{j} \sum_{k=j}^{n} \hat{v}_{(i-1)k} p^{i-j} \eta_j p^{k-j} \eta_j + \frac{m_n^2}{c_j} \left(\sum_{i=j}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j \right)^2 + c_j U_j^2 \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left(2\sum_{i=1}^{j} \sum_{k=j}^{n} \hat{v}_{(i-1)k} p^{i-j} \eta_j p^{k-j} \eta_j + \hat{g}_j \left(\sum_{i=j}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j \right)^2 + \frac{M_n^2}{\hat{g}_j} U_j^2 \right) dt = \qquad (7.80)$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{i,k=1}^{n} \hat{w}_{ik} p^{i-j} \eta_j p^{k-j} \eta_j + c_j U_j^2 \right) dt = \int_0^T \left(\sum_{i,k=1}^{n} \hat{w}_{ik} \hat{\eta}_i \hat{\eta}_k + c_j U_j^2 \right), \ \hat{w}_{ik} = \hat{w}_{ki} \ .$$

Вагові кефіцієнти $\hat{w}_{ik}$ інтегранта функціонала (7.80) пов’язані з коефіцієнтами функції Ляпунова

$$\hat{V}(\hat{\eta}) = \sum_{i,k=j}^{n} \hat{v}_{ik} \hat{\eta}_i \hat{\eta}_k, \qquad \hat{v}_{ik} = \hat{v}_{ki,} \qquad (7.81)$$

що визначаються виразом (7.81), наступними співвідношеннями:

$$\hat{w}_{ik} = \hat{v}_{(i-1)k} + \frac{M_n^2}{c_j}\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn} = \hat{v}_{(i-1)k} + \hat{g}_j\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn}, \qquad \text{при } i = j; k > j;$$

$$\hat{w}_{ik} = 2\hat{v}_{(i-1)k} + \frac{m_n^2}{c_j}\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn} = 2\hat{v}_{(i-1)k} + \hat{g}_j\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn}, \qquad \text{при } i = k = j;$$

$$\hat{w}_{ik} = \hat{v}_{(i-1)k}, \qquad \text{при } i < j; k \geq j; \quad (7.82)$$

$$\hat{w}_{ik} = \frac{m_n^2}{c_j}\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn} = \hat{g}_j\hat{v}_{in}\hat{v}_{kn}, \qquad \text{при } i, k > j;$$

$$\hat{w}_{ik} = 0, \qquad \text{при } i, k < j.$$

Контрольні запитання

1.В чому суть модифікованого принципу симетрії?

2.Відповідність модифікованого принципу симетріїзадачіаналітичногоконструюваннярегуляторів.

3.Визначення функції Ляпунова модифікованим принципом симетрії.

Тема 8.ФУНКЦІОНАЛИ ЯКОСТІ ТА АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ РЕЛЕЙНИХ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ МОДИФІКОВАНИМ ПРИНЦИПОМ СИМЕТРІЇ

8.1 Критерії оптимальності релейних систем керування

В теорії систем автоматичного керування не слабшає інтерес до розривних керувань в ковзному режимі. Однак, як правило, синтез керуючих впливів здійснюється, виходячи з умов існування стійкого ковзного режиму, що забезпечує стійкість синтезованих систем, але не гарантує бажану якість перехідних процесів. У той же час добре відомо, що вибір оптимізуючого функціоналу зумовлює вид і характер оптимального керуючого впливу і дозволяє здійснити синтез систем з наперед заданими властивостями, які ті набувають завдяки розривним управлінням в ковзному режимі. У відомих літературних джерелах відсутня інформація про способи призначення функціоналів якості, мінімізація яких здійснюється розривними керуваннями в ковзному режимі і гарантує граничні динамічні характеристики синтезованих систем. Знайдемо такі функціонали.

Оптимальні керування (7.61), (7.69), (7.74) і (7.78) отримані у відкритій області і не враховують природного обмеження на амплітуду керуючого впливу

$$|U| \leq 1. \qquad (8.1)$$

З урахуванням обмеження (8.1) алгоритм керування (7.61) набуває вигляду

$$U_j = -\mathrm{sat}\left(\frac{m_n}{c_j}\sum_{i=0}^{n} v_{in}^{j}\eta_i\right) = -\mathrm{sat}\left(\frac{g_j}{m_n}\sum_{i=0}^{n} v_{in}^{j}\eta_i\right). \qquad (8.2)$$

Прагнення до нуля вагового коефіцієнта c_j призводить до необмеженого збільшення коефіцієнта підсилення g_j регулятора, що реалізує алгоритм (8.2), при цьому справедливий вираз

$$\lim_{c_j\to 0}\mathrm{sat}\left(\frac{m_n}{c_j}\sum_{i=0}^{n} v_{in}^{j}\eta_i\right) = \mathrm{sign}\left(m_n\sum_{i=0}^{n} v_{in}^{j}\eta_i\right).$$

Визначення функціоналу якості, який мінімізується керуванням

$$U_j = -\mathrm{sign}\left(m_n\sum_{i=0}^{n} v_{in}^{j}\eta_i\right) \qquad (8.3)$$

на траєкторіях руху системи (7.60), шляхом трансформування функціоналу (7.62) в результаті граничного переходу

$$I_j = \lim_{c_j\to 0}\int_0^{\infty}\left(\frac{m_n^2}{c_j}\left(\sum_{i=0}^{n} v_{in}^{j}\eta_i\right)^2 + c_j U_j^2\right)dt$$

призводить до невизначеності. Усунемо цю невизначеність шляхом розв’язанняосновного функціонального рівняння Беллмана щодо інтегрантаоптимізуючого функціоналу.

Розглянемо спочатку об'єкт керування третього порядку, збурений рух якого описується рівняннями (7.39). Вважаємо, що керуючий вплив

$$U = -\mathrm{sign}\left[m_3\left(v_{03}\eta_0 + v_{13}\eta_1 + v_{23}\eta_2 + v_{33}\eta_3\right)\right] \qquad (8.4)$$

мінімізує функціонал

$$I = \int_0^{\infty} F dt \qquad (8.5)$$

на траєкторіях руху системи (7.39). В алгоритмі керування (8.4), v_{i3},(i=0,...,3) - коефіцієнти функції (7.40), які визначаються виразами (3.74).

Визначимо повну похідну за часом функції (7.40) на траєкторіях руху системи (7.39) з керуючим впливом (8.4)

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial V}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt}=2(v_{00}\eta_0+v_{01}\eta_1+v_{02}\eta_2+v_{03}\eta_3)\eta_1+$$
$$+2(v_{01}\eta_0+v_{11}\eta_1+v_{12}\eta_2+v_{13}\eta_3)\times$$
$$(b_{11}\eta_1+b_{12}\eta_2+b_{13}\eta_3)+2(v_{02}\eta_0+v_{12}\eta_1+v_{22}\eta_2+v_{23}\eta_3)\times$$
$$\times(b_{21}\eta_1+b_{22}\eta_2+b_{23}\eta_3)+2(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3)\times$$
$$\times(b_{31}\eta_1+b_{32}\eta_2+b_{33}\eta_3-m_3\mathrm{sign}[m_3(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3)])=$$
$$=2(v_{00}+v_{01}b_{11}+v_{02}b_{21}+v_{03}b_{31})\eta_0\eta_1+2(v_{01}b_{12}+v_{02}b_{22}+v_{03}b_{32})\eta_0\eta_2+$$
$$+2(v_{01}b_{13}+v_{02}b_{23}+v_{03}b_{33})\eta_0\eta_3+2(v_{01}+v_{11}b_{11}+v_{12}b_{21}+v_{13}b_{31})\eta_1{}^2+ \qquad (8.6)$$
$$+2(v_{02}+v_{12}b_{11}+v_{11}b_{12}+v_{22}b_{21}+v_{12}b_{22}+v_{23}b_{31}+v_{13}b_{32})\eta_1\eta_2+$$
$$+2(v_{03}+v_{13}b_{11}+v_{11}b_{13}+v_{23}b_{21}+v_{12}b_{23}+v_{33}b_{31}+v_{13}b_{33})\eta_1\eta_3+$$
$$+2(v_{12}b_{21}+v_{22}b_{22}+v_{23}b_{32})\eta_2^2+$$
$$+2(v_{13}b_{12}+v_{12}b_{13}+v_{23}b_{22}+v_{22}b_{23}+v_{33}b_{32}+v_{23}b_{33})\eta_2\eta_3+$$
$$+2(v_{13}b_{13}+v_{23}b_{23}+v_{33}b_{33})\eta_3^3-2|m_3(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3)|.$$

Підставивши в (7.77) значення коефіцієнтів функції Ляпунова (7.40), остаточно отримаємо

$$\frac{dV}{dt}=-2|m_3(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_3+v_{33}\eta_3)|. \qquad (8.7)$$

Оскількипохідна (8.7) по сутієінтегрантомоптимізуючогофункционала (8.5), взятомуіззворотним знаком

$$F=2|m_3(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_3+v_{33}\eta_3)|,$$

то керуючийвплив (18.4) мінімізує на траекторіяхруху системи (7.39) інтеграл

$$I=\int_0^\infty 2|m_3(v_{03}\eta_0+v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_3+v_{33}\eta_3)|dt. \qquad (8.8)$$

На підставі того, що повна похідназачасом (8.7) функції Ляпунова (7.40) при $m_3>0$ єнегативновизначеною функцією, збуренийрух системи (7.39) зкеруванням (8.4) асимптотичностійкий. Дослідимо тепер збурений рух об'єкта (7.26) в просторізмінних η_1, η_2, η_3 зкеруючимвпливом

$$U=-\mathrm{sign}|m_3(v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_3+v_{33}\eta_3)|, \qquad (8.9)$$

якийотримано з алгоритму (7.55) шляхомграничного переходу при $c\to 0$. В керуванні (8.9) v_{13}, v_{23}, v_{33}- коефіцієнти функції Ляпунова (7.56), яківизначаються співвідношеннями (7.41). визначимо повну похідну за часом функції (7.56) на траєкторіях руху системи (7.26) з керуванням (8.9)

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial V}{\partial\eta_i}\frac{d\eta_i}{dt}=2\left(v_{11}\eta_1+v_{12}\eta_2+v_{13}\eta_3\right)(b_{11}\eta_1+b_{12}\eta_2+b_{13}\eta_3)+$$
$$+2(v_{12}\eta_1+v_{22}\eta_2+v_{23}\eta_3)(b_{21}\eta_1+b_{22}\eta_2+b_{23}\eta_3)+$$
$$2(v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3)\{b_{31}\eta_1+b_{32}\eta_2+b_{33}\eta_3-$$
$$-m_3\mathrm{sign}\left[m_3(v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3)\right]\}=2\left(v_{11}b_{11}+v_{12}b_{21}+v_{13}b_{31}\right)\eta_1{}^2+$$
$$2\left(v_{12}b_{11}+v_{11}b_{12}+v_{22}b_{21}+v_{12}b_{22}+v_{23}b_{31}+v_{13}b_{32}\right)\eta_1\eta_2+ \qquad (8.10)$$
$$+2\left(v_{13}b_{11}+v_{11}b_{13}+v_{23}b_{21}+v_{12}b_{23}+v_{33}b_{31}+v_{13}b_{33}\right)\eta_1\eta_3+$$
$$+2\left(v_{12}b_{21}+v_{22}b_{22}+v_{23}b_{33}\right)\eta_2{}^2+$$
$$+2\left(v_{13}b_{11}+v_{11}b_{13}+v_{23}b_{21}+v_{12}b_{23}+v_{33}b_{31}+v_{13}b_{33}\right)\eta_2\eta_3+$$
$$+2\left(v_{13}b_{13}+v_{23}b_{23}+v_{33}b_{33}\right)\eta_3^3-2\left|m_3(v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3)\right|.$$

В силу співвідношень (7.41) похідна (8.10) приймає значення

$$\frac{dV}{dt}=-2\left(v_{01}\eta_1^2+v_{02}\eta_1\eta_2+v_{03}\eta_1\eta_3\right)-2\left|m_3\left(v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3\right)\right| . \qquad (8.11)$$

Отже, керуючий вплив (18.9) здійснює перевенення системи (7.26) з початкового положення в початок координат, мінімізуючи функціонал

$$I=\int_0^\infty 2\left[v_{01}\eta_1^2+v_{02}\eta_1\eta_2+v_{03}\eta_1\eta_3+\left|m_3\left(v_{13}\eta_1+v_{23}\eta_2+v_{33}\eta_3\right)\right|\right]dt . \qquad (8.12)$$

Оскільки похідна (8.11) непозитивна, збурений рух системи (7.26) з керуванням (8.9) стійкий.

Розглянемо тепер об'єкт керування, збурений рух якого описується системою диференціальних рівнянь у формі Фробеніуса (7.28), і визначимо критерій оптимальності, мінімум якого забезпечується керуючим впливом

$$U=-\mathrm{sign}\left[M_3\left(\frac{\hat v_{03}}{p}+\hat v_{13}+\hat v_{23}p+\hat v_{33}p^2\right)\eta_1\right]=$$
$$=-\mathrm{sign}\left[M_3\left(\hat v_{03}\eta_0+\hat v_{13}\eta_1+\hat v_{23}\eta_2+\hat v_{33}\eta_3\right)\right] \qquad (8.13)$$

при переведенні замкненої системи з початкового положення $\eta_1(0)$ в початок координат $\eta_1=0$. Алгоритм керування (8.13) отримано з виразу (7.28) шляхом спрямування коефіцієнта c до нуля з урахуванням обмеження (8.1), тому коефіцієнти $\hat v_{i3}$, (i=0,...,3) є коефіцієнтами функції Ляпунова (7.31) і підпорядковані співвідношенням (7.32).

Визначимо повну похідну за часом функції (7.32) на траєкторіях руху системи (7.30) з керуванням (8.13)

$$\frac{d\hat{V}}{dt}=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{\eta}_i}\frac{d\hat{\eta}_i}{dt}=2\left(\hat{v}_{00}\eta_0+\hat{v}_{01}\eta_1+\hat{v}_{02}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{03}\hat{\eta}_3\right)\eta_1+$$
$$+2\left(\hat{v}_{01}\eta_0+\hat{v}_{11}\eta_1+\hat{v}_{12}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{13}\hat{\eta}_3\right)\hat{\eta}_2+$$
$$+2\left(\hat{v}_{02}\eta_0+\hat{v}_{12}\eta_1+\hat{v}_{22}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_3\right)\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3)\times$$
$$\times\left\{-a_1\eta_1-a_2\hat{\eta}_2-a_3\hat{\eta}_3-M_3\mathrm{sign}\left[M_3\left(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right]\right\}=$$
$$=2(\hat{v}_{00}-\hat{v}_{03}a_1)\eta_0\eta_1+2(\hat{v}_{01}-\hat{v}_{03}a_2)\eta_0\hat{\eta}_2+2(\hat{v}_{02}-\hat{v}_{03}a_3)\eta_0\hat{\eta}_3+$$
$$+2(\hat{v}_{01}-\hat{v}_{13}a_1)\eta_1^2+2(\hat{v}_{02}+\hat{v}_{11}-\hat{v}_{23}a_1-\hat{v}_{13}a_2)\eta_1\hat{\eta}_2+$$
$$+2(\hat{v}_{03}+\hat{v}_{12}-\hat{v}_{33}a_1-\hat{v}_{13}a_3)\eta_1\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{12}-\hat{v}_{23}a_2)\hat{\eta}_2^2+$$
$$+2(\hat{v}_{13}+\hat{v}_{22}-\hat{v}_{33}a_2-\hat{v}_{23}a_3)\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{23}-\hat{v}_{33}a_3)\hat{\eta}_3^2-$$
$$-2\left|M_3\left(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right|. \qquad (8.14)$$

Підставивши в рівняння (8.14) значення коефіцієнтів (7.32), отримаємо в остаточному вигляді шукану похідну функції Ляпунова

$$\frac{d\hat{V}}{dt}=-2\left|M_3(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1)\right|. \qquad (8.15)$$

Негативна визначеність похідної (8.15) гарантує асимптотичну стійкість збуреного руху досліджуваної системи, а керуючий вплив (8.13) мінімізує функціонал

$$I=\int_0^\infty 2\left|M_3(\hat{v}_{03}\eta_0+\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1)\right|dt\,. \qquad (8.16)$$

на траєкторіях цього руху.

Виключивши з алгоритму керування (8.13) інтегральну складову $\frac{\hat{v}_{03}}{p}\eta_1$, отримаємо керуючий вплив

$$U=-\mathrm{sign}\left[M_3\left(\hat{v}_{13}+\hat{v}_{23}p+\hat{v}_{33}p^2\right)\eta_1\right]=-\mathrm{sign}\left[M_3\left(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3\right)\right]. \qquad (18.17)$$

Дослідимо стійкість системи (7.27) з керуючим впливом (8.17), для чого обчислимо повну похідну за часом функції Ляпунова (7.71), коефіцієнти якої входять в алгоритм (8.17) і підпорядковуються співвідношенням (7.32),

$$\frac{d\hat{V}}{dt}=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{\eta}_i}\frac{d\hat{\eta}_i}{dt}=2\left(\hat{v}_{11}\eta_1+\hat{v}_{12}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{13}\hat{\eta}_3\right)\hat{\eta}_2+2\left(\hat{v}_{12}\eta_1+\hat{v}_{22}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_3\right)\hat{\eta}_3+$$
$$+2\left(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}\hat{\eta}_2+\hat{v}_{33}\hat{\eta}_3\right)\left\{-a_1\eta_1-a_2\hat{\eta}_2-a_3\hat{\eta}_3-M_3\mathrm{sign}\left[M_3\left(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right]\right\}=$$
$$=-2\hat{v}_{13}a_1\eta_1^2+2(\hat{v}_{11}-\hat{v}_{23}a_1-\hat{v}_{13}a_2)\eta_1\hat{\eta}_2+2(\hat{v}_{12}-\hat{v}_{33}a_1-\hat{v}_{13}a_3)\eta_1\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{12}-\hat{v}_{23}a_2)\hat{\eta}_2^2+$$
$$+2(\hat{v}_{13}+\hat{v}_{22}-\hat{v}_{33}a_2-\hat{v}_{23}a_3)\hat{\eta}_2\hat{\eta}_3+2(\hat{v}_{23}-\hat{v}_{33}a_3)\hat{\eta}_3^2-2\left|M_3\left(\hat{v}_{13}\eta_1+\hat{v}_{23}p\eta_1+\hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right|.$$
$$(8.18)$$

Підставивши в рівняння (8.18) значення коефіцієнтів (7.32), остаточно отримаємо

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = -2\left[\hat{v}_{01}\eta_1^2 + \hat{v}_{02}\eta_1 p\eta_1 + \hat{v}_{03}\eta_1 p^2\eta_1 + \left|M_3\left(\hat{v}_{13}\eta_1 + \hat{v}_{23}p\eta_1 + \hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right|\right]. \quad (8.19)$$

Внаслідок того, що похідна (8.19) негативна, збурений рух системи (7.27) з керуванням (8.17) стійкий і на траєкторіях цього руху мінімізується функціонал

$$I = \int_0^\infty 2\left[\hat{v}_{01}\eta_1^2 + \hat{v}_{02}\eta_1 p\eta_1 + \hat{v}_{03}\eta_1 p^2\eta_1 + \left|M_3\left(\hat{v}_{13}\eta_1 + \hat{v}_{23}p\eta_1 + \hat{v}_{33}p^2\eta_1\right)\right|\right] dt. \quad (8.20)$$

Виконавши аналогічні дослідження для систем більш високих порядків і узагальнивши результати на систему довільного n-го порядку для випадку регулювання змінної η_j (j=1,...,n), можна зробити наступні висновки.

Для об'єкта керування, динаміка якого описується системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + m_n U, \qquad (i = 1,..., n) \quad (8.21)$$

мінімізація інтегрального функціонала якості

$$I_j = \int_0^\infty 2\left|m_n \sum_{i=0}^{n} v_{in}^j \eta_i\right| dt. \quad (8.22)$$

здійснюється законом керування виду

$$U_j = -\mathrm{sign}\left(m_n \sum_{i=0}^{n} v_{in}^j \eta_i\right). \quad (8.23)$$

У виразах (18.22) і (18.23) v_{in}^j - коефіцієнти функції Ляпунова (7.63), підпорядковані співвідношеннями (7.64) - (7.66).

Якщо виключити з алгоритму керування (8.23) інтегральну складову $v_0\eta_0 = v_{0n}\frac{1}{p}\eta_j$, то керуючий вплив

$$U_j = -\mathrm{sign}\left(m_n \sum_{i=0}^{n} v_{in}^j \eta_i\right), \quad (8.24)$$

мінімізує на траєкторіях руху системи (18.21) інтегральний функціонал якості

$$I_j = \int_0^\infty 2\left[\sum_{i=1}^{n} v_{0i}^j \eta_i \eta + \left|m_n \sum_{i=1}^{n} v_{in}^j \eta_i\right|\right] dt. \quad (8.25)$$

Якщо динаміка об'єкта керування у фіктивному фазовому просторі описана системою диференціальних рівнянь збуреного руху в формі Фробеніуса

$$\begin{aligned} p\hat{\eta}_i &= \hat{\eta}_{i+1}; \qquad (i = 1,..., n-1) \\ p\hat{\eta}_n &= \sum_{i=1}^{n} -a_i\hat{\eta}_i + M_n U, \end{aligned} \quad (8.26)$$

то керуючий вплив

$$U_j = -\mathrm{sign}\left(M_n \sum_{i=0}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j}\eta_j\right). \quad (8.27)$$

мінімізує на траєкторіях збуреного руху (18.26) функціонал

$$I_j = \int_0^\infty 2\left| M_n \sum_{i=0}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j \right| dt. \qquad (8.28)$$

Керуючий вплив

$$U_j = -\mathrm{sign}\left(M_n \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j \right), \qquad (8.29)$$

отриманий шляхом виключення інтегральних складових $\sum_{i=0}^{j} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j$ з алгоритму (8.27), мінімізує на траєкторіях збуреного руху системи (8.26) інтегральний функціонал якості

$$I_j = \int_0^\infty 2\left[\sum_{i=1}^{j} \sum_{k=j}^{n} \hat{v}_{(i-1)k} p^{i-j} \eta_j p^{k-j} \eta_j + \left| M_n \sum_{i=j}^{n} \hat{v}_{in} p^{i-j} \eta_j \right| \right] dt. \qquad (8.30)$$

В алгоритмах (8.27), (8.29) і функціоналах (8.28), (8.30) $\hat{v}_{ik}$, (i,k=1,...,n) - коефіцієнти функції Ляпунова (7.71), підпорядковані співвідношенню (7.73).

8.2 Ковзні режими релейних систем оптимального керування

В релейних системах з оптимальними керуваннями (8.23), (8.24), (8.27) і (8.29) існує ковзний режим. Покажемо це на прикладі системи (8.21) з керуванням (8.24). Введемо нову змінну

$$\eta_{n=1} = m_n \sum_{i=1}^{n} v_{in}^{j} \eta_{i,}$$

яка представляє собою суму сигналів на вході релейного регулятора (8.24). Це дозволяє привести систему (8.21) з керуванням (8.24) до виду

$$\begin{aligned} p\eta_i &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \eta_k - m_n \mathrm{sign}\eta_{n+1}, \qquad (i = 1,...,n) \\ p\eta_{n+1} &= \sum_{j=1}^{n} b_{(n+1)j} \eta_j - m_{n+1} \mathrm{sign}\eta_{n+1,} \end{aligned} \qquad (8.31)$$

де

$$\begin{aligned} b_{(n+1)j} &= m_n \sum_{k=1}^{n} v_{kn}^{j} b_{nj}, \qquad (j = 1,...,n); \\ m_{n+1} &= \sum_{j=1}^{n} v_{jn} m_n^2. \end{aligned} \qquad (8.32)$$

Можна зробити висновок, що при дотриманні умови

$$m_{n+1} > 0 \qquad (8.33)$$

будь-яка траєкторія системи, яка увійшла в область

$$\left| \sum_{j=1}^{n} b_{(n+1)j} \eta_j \right| < m_{n+1,}$$

обов'язково потрапляє на гіперплощину ковзання

$$m_n \sum_{i=1}^{n} v_{in}^{j} \eta_i = 0. \qquad (8.34)$$

Подальший рух системи до початку координат здійснюється в ковзному режимі по траєкторії, яка визначається рівнянням

$$p\eta_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k - \frac{m_n}{m_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} b_{(n+1)k}\eta_k, \quad (i = 1,...n).$$

Умова (8.33) виникнення та існування ковзного режиму в системі (8.31) завжди виконується, оскільки згідно з виразами (7.76) і (8.32) коефіцієнт m_{n+1} є позитивно визначеною квадратичною формою відносно параметра системи m_n.

При великих початкових відхиленнях система (8.21) з оптимальним керуванням (8.24) поводиться спочатку як розімкнена з максимально можливим керуючим впливом U=±1, рухаючись по граничній фазовій траєкторії до тих пір, поки не потрапить на гіперплощину ковзання (8.34), де відбувається замикання системи і виникає ковзний режим.

Диференціальні рівняння збуреного руху в формі Фробеніуса (8.26) є окремим випадком диференціальних рівнянь у формі Коші і завжди можуть бути приведені до вигляду (8.21). Тоді рух системи, що складається з об'єкта керування (8.21) з будь-яким з алгоритмів оптимального керування (8.23), (8.24), (8.27) або (8.29) завжди може бути описано рівняннями

$$p\eta_i - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k + m_n \operatorname{sign} \sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0, \quad (i = 0,..,n) \qquad (8.35)$$

Якщо сформувати для системи (18.35) n незалежних керуючих впливів, які здійснюють стабілізацію n керованих змінних η_j і забезпечити підключення на вхід об'єкта керування впливу U_j, кожен раз, як тільки регульована змінна η_j досягає рівня обмеження, то n гіперплощин ковзання, що проходять через початок координат, поділять фазовий простір на 2^n областей. Забезпечивши відповідним чином рух системи (8.35) по границях цих областей, можна сформувати теоретично будь-який бажаний вид перехідного процесу і надати системі властивості низької чутливості до параметричних і координатних збурень.

Рух системи (8.35) при одному керуючому впливі, поданому на вхід об'єкта керування, описується рівняннями

$$p\eta_i - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k = 0, \qquad (i = 0,..., n-1);$$

$$p\eta_i - \sum_{k=1}^{n} b_{nk}\eta_k + m_n \operatorname{sign} \sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0.$$

При цьому існує лише одна площина ковзання

$$\sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0.$$

Для релейних систем керування швидкістю проникненням називається проекція вектора швидкості точки, що зображує, на нормаль до площини

перемикання, вона визначається виразом

$$pS_n = \sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j} p\eta_k .$$

Якщо швидкість проникнення при переході точки, що зображує, через площину перемикання не змінює знака, то фазова траєкторія має продовження за площиною перемикання і ковзний режим не виникає. Якщо ж швидкості проникнення до перетинання pS_n^- і після перетину pS_n^+ мають різні знаки, то ковзний режим виникає і точка, що зображує, "ковзає" уздовж гиперплоскости перемикання до початку координат.

Умови виникнення ковзного режиму, таким чином, мають вигляд

$$\left(pS_n^-\right)\cdot\left(pS_n^+\right) < 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0 \quad (8.36)$$

і завжди виконуються в досить малій околиці початку координат. Тому при великих початкових відхиленнях, коли умови (18.36) виникнення ковзного режиму після першого перемикання свідомо не виконуються, рух системи відбувається по відрізках фазових траєкторій з перемиканнями на гіперплощині $\sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0$ і наближенням до початку координат. Після перемикання, при якому виконуються умови (8.36), виникає ковзний режим. Подальший рух точки, що зображає, до початку координат здійснюється в площині перемикань і підпорядковується лінійним рівнянням

$$\begin{aligned} &p\eta_i - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\eta_k = 0, \quad (i = 0,.., n-1); \\ &\sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0. \end{aligned} \qquad (8.37)$$

Вирази (8.37) наочно показують, що ковзний режим забезпечує зниження порядку диференціальних рівнянь руху системи.

При наявності n незалежних керуючих впливів

$$U_j = -\mathrm{sign}\sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k, \qquad (j = 1,...,n)$$

система має n гіперплощин перемикань

$$S_j = \sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k, \qquad (j = 1,...,n).$$

Тоді умови виникнення ковзного режиму на j-ій гіперплощині перемикань можна представити у вигляді

$$\left(pS_j^-\right)\cdot\left(pS_j^+\right) < 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} v_{kn}^{j}\eta_k = 0. \qquad (8.38)$$

Рух системи з довільної точки фазового простору почнеться по відрізках фазових траєкторій, які будуть перетинати гіперплощини перемикання і тривати за ними до тих пір, поки не потраплять на гіперплощину перемикання в точку, де дотримуються умови (18.38). Тут виникне ковзний режим і рух системи буде відбуватися в даній гіперплощині до тих пір, поки не досягне іншої гіперплощини перемикань. Подальший рух можливо в колишній

гіперплощині, або в новій гіперплощині перемикань, або уздовж перетину цих гіперплощин. Отже, сінтезувавши кілька алгорітмів оптимального релейного керування і забезпечивши відповідним чином їх стикування, можна отримати досить широкий набір можливих типів рухів системи, що конструюється.

Контрольні запитання

1.Чим відрізняються функціонали якості для синтезу лінійних і релейних систем керування ?

2.Які переваги мають релейні системи керування перед лінійними?

3.Доведіть, що релейна система в ковзному режимі еквівалентна лінійній з нескінченним коефіцієнтом підсилення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.

2. Кузовков Н.Т. Модальноеуправление и наблюдающиеустройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184с.

3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

4. Ляпунов А.М. Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981. – 256 с.

5. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. –М.-Л.:Энергия, 1965. – 220 с.

6. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / А.В.Садовой, Б.В.Сухинин, Ю.В.Сохина.: Под ред. А.В.Садового. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с.

7. Релейные системы оптимального управления электроприводами/ А.В.Садовой, Б.В.Сухинин, Ю.В.Сохина, А.Л.Дерец: Под ред. А.В.Садового. – Днепродзержинск, 2011. – 337 с.

Навчально-методичневидання

О.В.Садовой

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ
«СУЧАСНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ»

для магістрів спеціальності
141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Підготовлено до виходу в світ
у Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842
49005, м. Дніпро, просп. Д. Яворницького, 19